DESIGN ENGINEERING:

INVENTIVENESS, ANALYSIS AND DECISION MAKING

JOHN R. DIXON

Associate Professor of Engineering
Swarthmore College

McGRAW-HILL BOOK COMPANY
NEW YORK·ST. LOUIS·SAN FRANCISCO·TORONTO·
LONDON·SYDNEY

1966

ДЖ. ДИКСОН

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ:
ИЗОБРЕТАТЕЛЬСТВО, АНАЛИЗ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
Е. Г. КОВАЛЕНКО

С ПРЕДИСЛОВИЕМ
проф. И. Т. АЛАДЬЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1969

УДК 621.01.001

Анализ различных сторон деятельности инженера, проектирующего техническую систему. Работа инженера представлена как единый процесс творчества, анализа и принятия решений.

Рассмотрены три основных аспекта проектирования систем: изобретательство, технический анализ и процесс принятия решений. Автор обсуждает как интуитивные инженерные методы, не связанные с точным количественным анализом, так и количественные методы, составляющие содержание инженерного анализа.

Деятельность инженера, разрабатывающего систему, рассматривается в книге во всем ее многообразии и весьма последовательно. Автор учит читателя логически анализировать конкретные технические задачи, опираясь на знания, полученные им при изучении отдельных дисциплин. Методика инженерного проектирования иллюстрируется конкретными примерами разработок, взятых из разных областей техники. Кроме того, приведено много задач для самостоятельного изучения.

В целом книга представляет собой учебное пособие по предмету, знание которого необходимо каждому инженеру. Она адресована студентам и преподавателям технических вузов, а также инженерам-конструкторам и разработчикам систем.

Редакция литературы по новой технике

Инд. 3-3-14

ПРЕДИСЛОВИЕ

Есть книги, говорящие сами за себя. Электротехникам не нужно рекомендовать «Учение об электричестве» Поля, а гидро- и аэромеханикам — «Гидроаэродинамику» Прандтля. В ином положении находится книга Дж. Диксона — наш читатель не знаком с именем автора, а ее содержание, если судить по названию, должно, по-видимому, охватывать весьма обширную область. В самом деле, что такое «Проектирование систем»? С системой ассоциируется обычно что-то сложное, состоящее из большого числа элементов, которые должны работать согласованно. Вряд ли в глазах инженера выглядит системой, например, игрушечная ракета. Между тем Диксон трактует понятие системы весьма расширительно. К системам он относит различные объекты, технологические комплексы и вообще любые технические проблемы, решаемые человеком. Проектирование систем по Диксону — это поиски инженерных решений таких проблем, причем автор имеет в виду научно-обоснованное решение, технически осуществимое и экономически целесообразное.

Книга, следовательно, адресована весьма широкому кругу читателей — инженерам всех специальностей, всем, кто что-то рассчитывает, проектирует и создает. В ней (если не считать конкретных примеров, в большинстве случаев не имеющих самостоятельного значения, а призванных лишь проиллюстрировать применение излагаемого метода) не рассматриваются детали отдельных инженерных дисциплин, а только методология и общие принципы подхода к проектированию в указанном выше смысле, а также пути и средства решения.

Поставленные цели определили содержание и форму книги. Трудно сказать, что это — учебный курс, справочное руководство или самоучитель. Прежде всего автор обращается к молодым инженерам, недавно покинувшим стены институтов и не имеющих практической хватки, умения применять свои обширные теоретические знания. Помочь им приобрести необходимые навыки, ознакомить их с определенной системой проведения проектной работы, изложить методы и технику выполнения отдельных ее этапов — таковы главные цели этой книги. Но книга интересна и опытным инженерам. В ней систематизированы и без излишней математизации изложены различные методы, используемые при инженерном анализе систем. Ряд из них получил применение в инженерной практике сравнительно недавно. К числу таких разделов, например, относятся приложения теории вероятностей и математической статистики к теории надежности, различные методы оптимизации. В книге кратко изложены некоторые вопросы исследования операций, в частности методы критического пути и ПЕРТ. В конце каждой главы автор приводит задачи и упражнения по изложенному материалу, а также рекомендует дополнительную литературу, приводя ее краткую характеристику.

Таким образом, книга может служить также пособием для повышения квалификации инженеров, для быстрого общего ознакомления и изучения отдельных методов инженерного анализа и техники выполнения операций.

У книги длинное название, но ее основное содержание может быть выражено в трех словах: «Основы инженерного дела». Она оригинальна по замыслу и, как мы уверены, будет с интересом встречена читателями.

И. Аладьев

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Эта книга посвящена инженерному проектированию, и в ней последовательно излагается мысль, что проектирование сводится к такому решению технических задач, которое, с одной стороны, должно быть научно-обоснованным, а с другой — учитывать социальный аспект реализации полученного результата. Книга отражает мое убеждение, что инженерное проектирование по существу не является «искусством», оно скорее представляет собой такую деятельность, которую можно исследовать и анализировать, а ее основами овладеть в процессе обучения. Я полагаю, что решение технических задач является высокоинтеллектуальным занятием, требующим применения знаний, а это заслуживает такого же внимания, как и приобретение знаний. Чтобы применять знания, нужно активно владеть ими и, кроме того, иметь определенную цель.

Анализируя процесс инженерного проектирования, я выделяю три наиболее общих вида деятельности: изобретательство, инженерный анализ и принятие решений. Каждый из них является предметом специального изучения и рассматривается отдельно.

Книга написана на основе лекций по инженерному проектированию, которые я читал студентам старших курсов машиностроительных специальностей в университете Пардью и в Свартморском колледже. При чтении этих курсов я все более и более убеждался в том, что мои студенты знают больше того, что они понимают или могут использовать на практике. Я поставил перед собой задачу помочь им научиться целеустремленно использовать те знания, которые они приобрели при изучении теоретических и технических дисциплин. У меня почти не вызывает сомнения тот факт, что существующая в настоящее время система обучения тормозит развитие у студентов способностей применять на практике то, чем они уже овладели. Поэтому я решил остановиться на тех общих качествах, которые необходимы инженеру-проектировщику, чтобы студенты могли их приобрести в процессе обучения.

Понятие о проектировании как решении задачи несколько шире, чем то, что по традиции вкладывается в термин «проектирование», когда его используют применительно к разработке машин и механизмов. В соответствии с этим более широким смыслом я включил в книгу примеры и задачи из области теплотехники, механики жидкостей и термодинамики, а также и из более традиционных областей проектирования.

В течение первого десятилетия после второй мировой войны в инженерном образовании особое значение приобрело изучение теоретических и технических дисциплин. Начала воплощаться хорошая идея — учить не тонкостям практики, а принципам и основам наук, на которых строится быстро изменяющаяся практическая деятельность. А изменения эти действительно огромны. Теперь наступило время, когда мы начинаем обучать не практике проектирования, а принципам и основам решения задачи проектирования. Именно этой цели на первом этапе обучения инженера и должна, по мысли автора, служить эта книга.

Джон Р. Диксон

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ В ИНЖЕНЕРНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

1.1. Техника и общество

Рассмотрим кратко ту роль, которую техника играет в различных странах мира. В США, европейских странах, Японии и в Советском Союзе техническое развитие достигло высокого уровня. Успехи этих передовых стран очевидны. По широким автомагистралям и большим мостам мчатся надежные и быстрые грузовики и легковые автомобили. Курсируют поезда. В море полно кораблей, а в воздухе — самолетов. Фабрики и заводы выпускают все больше и больше товаров при непрерывно сокращающемся числе занятых на них рабочих. Тракторы обрабатывают землю. Уборка урожая механизирована. Быстродействующие системы связи и вычислительные машины обслуживают торговлю, промышленность, науку и правительственные органы.

Теперь посмотрим на районы, не развитые в техническом отношении. Это Африка, бóльшая часть Индии, Китай, Средний Восток, Центральная Америка, многие районы Южной Америки. Сельское хозяйство опирается здесь преимущественно на ручной труд и использование домашних животных. Промышленное производство неэффективно и ведется примитивными методами. Транспорт и связь работают медленно и ненадежно. Бедность здесь — обычное явление.

В чем же причина такого различия? Разрыв между странами, развитыми в техническом отношении, и более бедными странами обусловлен процессом, получившим название промышленной революции. Хотя во многих отношениях этот процесс был мучительным, он позволил снять с плеч человека огромное бремя тяжелого физического труда. Он позволил ряду стран достигнуть такого уровня, когда один человек может производить сельскохозяйственную продукцию, достаточную, чтобы прокормить многих, в то время как труд другого обеспечивает большое число людей промышленными товарами. В результате у всех сократилась продолжительность рабочего дня, и при этом производится все больше и больше вещей, которые ранее считались предметами роскоши.

Нет необходимости затевать дискуссию относительно того, какая из многих областей успешной деятельности человека — техника, наука, медицина, право и т. д.— в наибольшей степени способствовала удаче промышленной революции. Совершенно очевидно, что развитие техники было одной из составных и неотъемлемых частей этого процесса. Кроме того, столь же очевидно и то, что в настоящее время современное общество весьма сильно зависит от своих инженеров и техников. За истекшие годы инженеры решили большое число проблем, связанных с индустриализацией, и эти достижения получили широкое распространение. Но, что еще более важно, стало обычным, что экономика передовых стран получает от инженеров все больше и больше новых решений. Общество полагается не только на прежние решения, осуществление которых продолжается, но и постоянно требует от своих инженеров новых творческих идей. Экономическое благосостояние окажется под угрозой, если инженеры прекратят поиски новых, лучших способов изготовления вещей.

В настоящее время в передовых странах происходит новая революция, называемая автоматизацией. Если промышленная революция в значительной мере освободила человека от бремени тяжелого труда, то новая революция направлена на уменьшение бремени однообразной работы. Автоматизация облегчает также умственный труд, так как большие быстродействующие вычислительные машины избавляют человека от бесконечных вычислений. По мере развития новой революции автоматизация распространяется на все более тонкие виды умственной деятельности. Влияние автоматизации начинает ощущаться даже в такой области, как обучение, где очень сильно индивидуальное начало. Совершенно очевидно, что, как и в ходе промышленной революции, основной революционизирующей силой является техника. Деятельность инженеров сыграла исключительно важную роль в прошлом и продолжает играть значительную роль в жизни современного человека. Инженеры берут на себя важные обязательства перед будущим и уже сейчас намечают его контуры.

1.2. Новые проблемы, стоящие перед инженерами

Не представляет труда проследить в общих чертах ту многообразную роль, которую играла техника в ходе промышленной революции и играет теперь в ходе автоматизации. Вначале были нужны инженеры-строители, чтобы проложить первые шоссейные и железные дороги, соорудить мосты, построить города и порты. В наших технических учебных заведениях прежде всего появились инженерно-строительные факультеты, и в течение многих лет они были самыми крупными. Затем в процессе перехода от простейшего аграрного общества к комплексному индустриальному все в большей и большей степени стала ощущаться нужда в инженерах-механиках, способных создавать машины, строить и эксплуатировать фабрики и заводы, а также в специалистах по энергоснабжению и конструированию новых изделий. Как и следовало ожидать, в высших учебных заведениях появились механические факультеты, а в относительном выражении численность студентов на инженерно-строительных факультетах сократилась. В настоящее время в связи с потребностью в более совершенных средствах управления и автоматизации вследствие резкого усложнения средств связи, а также благодаря появлению большого числа новых материалов и научных открытий увеличился спрос на инженеров электротехнических специальностей. Все это снова нашло отражение в увеличении численности студентов на электротехнических факультетах. Заглядывая в недалекое будущее, можно предсказать, что численность инженеров всех специальностей, по-видимому, стабилизируется: будут усиленно развиваться физические науки и математика, а также комплексы бихевиористских и биологических дисциплин. В свете *потребностей* развивающегося общества все эти изменения кажутся вполне естественными. Однако фактическое развитие отстает от потребностей.

Рассмотрим теперь нужды передовых стран. В настоящее время важной проблемой является не то, как строить мосты через большие реки, а то, каким образом бороться с загрязнением рек. Важной проблемой является не то, как строить большие города, а то, как уничтожить трущобы. Важной проблемой является не то, как изобрести новые виды оружия, а то, каким образом избежать применения того оружия, которое имеется. Когда было необходимо преодолевать определенные физические рубежи, строить города, совершать промышленную революцию, перед инженерами стояли ясные и определенные цели. Однако сейчас инженеры находят мало удовлетворения в том, чтобы производить все больше и больше прекрасных вещей для людей, умирающих от ожирения.

Все же высокие цели продолжают существовать и в наши дни; мы, инженеры, должны только захотеть их увидеть. Взять хотя бы такой пример. Две трети населения земного шара испытывает острую нехватку *продовольствия.* С течением времени ввиду роста численности населения Земли нехватка продовольствия станет безусловно еще более острой. Необходимы высокопроизводительные недорогие компактные системы производства продуктов питания. *Водоснабжение* представляет собой проблему как для передовых, так и для развивающихся стран. Во многих районах требуется все больше и больше пресной воды. Жизненно важной проблемой является во многих крупных промышленных центрах всех стран мира борьба с загрязнением воздуха. Исключительно важную роль в обеспечении работоспособности разрабатываемых сложных систем играют *транспорт* и *связь. Организация отдыха* (по мере увеличения досуга у трудящихся) и наличие большого числа лиц *пожилого возраста* (в результате увеличения продолжительности жизни) в перспективе также могут превратиться в серьезные социальные проблемы, для разрешения которых потребуется использование технических достижений.

Перед техникой по-прежнему стоит высокая цель, но она выдвигает новые требования к людям, избравшим технику своей специальностью. В наше время для достижения этой цели требуется в значительно большей мере знать и принимать во внимание социальные, политические и экономические аспекты решаемых проблем. Так, при решении проблем, связанных с загрязнением воздуха и воды, приходится иметь дело с предприятиями, загрязняющими воду и воздух, общественностью, протестующей против этих явлений, и правительственными органами, ответственными за принятие и выполнение соответствующих законов. Решение проблем, связанных с современными средствами сообщения, может привести к переселению тысяч людей или оказать какое-либо иное влияние на их жизнь. Аналогичные утверждения можно сделать и относительно большинства задач, решаемых техникой в настоящее время.

Сравнительно недавно возникло еще одно обстоятельство, которое ставит перед инженерами новые проблемы. Развитие науки и резкое увеличение числа научных открытий требуют от инженеров знания фундаментальных наук, которые не были важны для них ранее. Следует напомнить, что тесная связь науки и техники возникла не так давно. Исторически техника развивалась из ремесел. Первые инженеры были преимущественно мастеровыми и ремесленниками, слабо знакомыми с наукой. Однако в наши дни инженер должен владеть большим объемом научных знаний. В самом деле, фундаментальные науки составляют основу инженерного образования. Поэтому в настоящее время инженер сталкивается с необходимостью знать современные научные достижения и уметь применять их для решения практических вопросов.

Хотя новые сложные проблемы, стоящие перед инженерами, в значительно большей мере, чем когда бы то ни было ранее, требуют учета социальных и политических факторов и хотя для принятия решений в гораздо большей мере, чем когда бы то ни было прежде, необходимы научные знания, все же нужно сказать, что важнейшие задачи инженера попрежнему связаны с проектированием и разработкой техники. Принимая решение, можно использовать научные знания, и необходимо учитывать социальные и политические факторы, однако этими решениями будут проекты новых вещей или процессов.

1.3. Связь техники с другими видами деятельности человека

Существует несколько видов созидательной деятельности человека в обществе, развитом в научно-техническом отношении. На рис. 1.1 в одном направлении показана связь техники с наукой, с одной стороны, и с производством — с другой. Как уже указывалось ранее, в настоящее время инженеры обязаны знать, понимать и использовать данные основных физических и математических научных дисциплин. В то же время в своих проектах инженеры должны учитывать возможности производства, так как то, что нельзя построить, не обладает никакой полезностью.

Кроме науки и производства, инженер в функционально-эстетическом плане связан с искусством и ремеслами. Полезная вещь редко выглядит безобразной и не только

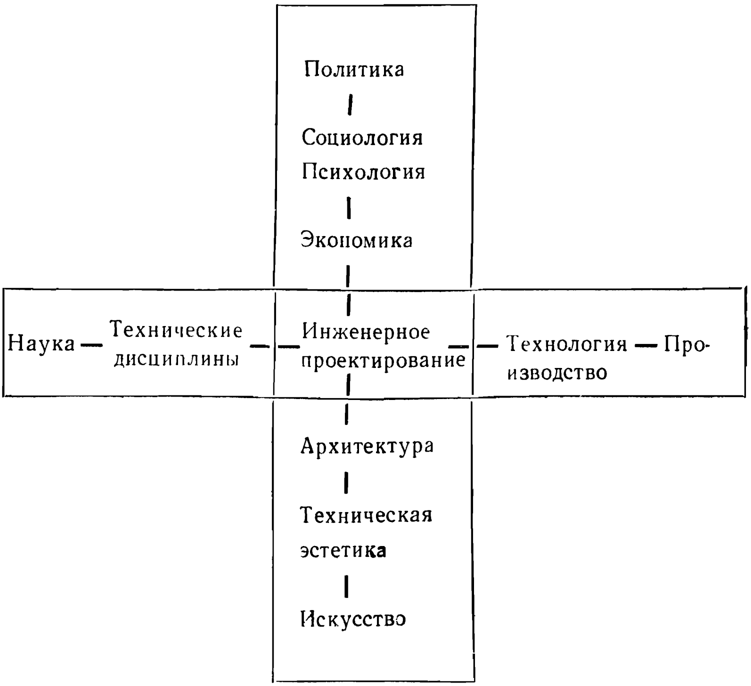


Рис. 1.1. Связь инженерного проектирования с другими видами деятельности человека.

потому, что мы в нашей жизни стремимся окружить себя красивыми вещами, но и потому, что мы редко терпим в течение длительного времени недостаточно привлекательные вещи. Первая действующая модель нового полезного предмета может быть ужасной с эстетической точки зрения, однако можно с уверенностью сказать, что при первой же переделке большое внимание будет уделено ее красоте.

Еще в одном плане деятельность инженера связана с экономикой, социологией и политикой. Связь с экономикой очевидна. Ни одно правительство или фирма не в состоянии позволить себе сделать все, что оно в данный момент захочет. Необходимо наличие экономических ресурсов, и инженер-проектировщик, если он собирается принимать какие-либо важные решения, должен знать экономические возможности как в масштабах своего отдела, так и в масштабе фирмы, страны и всего мира в целом. В данном случае знание этого вопроса означает нечто большее, чем умение чеканить фразы о важности прибыли и достоинствах «свободного» предпринимательства, и предполагает понимание и таких факторов, как издержки капиталистического предпринимательства для общества (например, загрязнение рек) и учет людских и других ресурсов, благодаря которым общество становится богатым, а экономика — эффективной.

Поскольку с техникой связана самая разнообразная деятельность человека, тот, кто начинает учиться в техническом вузе, сталкивается с широчайшим кругом вопросов, какие только можно себе вообразить. Он должен иметь хорошую подготовку в области физики и химии, технических дисциплин и математики. Он должен быть знаком с различными средствами производства, знать экономику и другие общественные науки в той мере, в какой они связаны с его инженерной деятельностью. Кроме того, инженер является человеком, живущим в обществе, поэтому его образование должно включать изучение гуманитарных наук. Наконец, его образование должно включать изучение *методов и приемов целенаправленного использования своих знаний*. Именно последние вопросы изучаются в курсах лекций по инженерному проектированию.

Программа подготовки инженеров отражает широкий круг проблем, связанных с техникой. Необходимо изучить гуманитарные и общественные науки, в том числе экономику. Необходимо изучить теоретические дисциплины, современные научные достижения, технические дисциплины и математику. Обычно студентам технических специальностей читают также курсы лекций по технологии и организации производства и, разумеется, лекции по инженерному проектированию.

1.4. Задача предмета «инженерное проектирование»

Задача этого предмета состоит в том, чтобы помочь студентам научиться применять свои знания, приобретенные ими при изучении теоретических, технических, общественных и гуманитарных дисциплин, к решению задач инженерной практики. Задача состоит не в том, чтобы студент изучил еще одну инженерную дисциплину или специальный технический предмет, а скорее в том, чтобы он научился целеустремленно и эффективно использовать уже имеющиеся у него знания. Научные и инженерные проблемы, связанные с проектированием, возникают в различных областях строительства, химии, электротехники и машиностроения. Таким образом, проектирование не ограничивается традиционной областью машиностроения, а включает теплотехнику, гидромеханику, электронику и другие области.

Задача инженерного проектирования почти всегда формулируется следующим образом: *разработать при некоторых ограничениях, обусловленных способом решения, элемент, систему или процесс, обеспечивающие оптимальное выполнение поставленной задачи при некоторых ограничениях, налагаемых на решение*. Слова «при некоторых ограничениях» встречаются в этом определении дважды и имеют целью подчеркнуть важную точку зрения, которой придерживается автор этой книги. Дело в том, что при решении инженерных задач имеют место ограничения *двух* видов. Одна группа ограничений относится к *методу решения задачи* и охватывает такие вопросы, как наличие знаний, сроки и имеющиеся в распоряжении лабораторное оборудование и вычислительная техника. Другая группа ограничений относится к самому *решению задачи* и связана с действием таких факторов, как естественные (физические) ограничения, издержки, наличие материалов, оборудования или производственного мастерства. Цель этой книги состоит в том, чтобы помочь студентам приобрести определенные навыки и взгляды, которые повысят возможности успешного решения инженерных задач с учетом ограничений обоих видов.

Это подводит нас к важной предпосылке, лежащей в основе этой книги. Нужно принять на веру, что *понимание и изучение процесса решения, связанного с проектированием и* *анализом (и его успехов, и неудач), повысят вероятность успеха в будущем.* Читатель, который догматически утверждает, что инженерное проектирование целиком и полностью является искусством, что по этому вопросу нет ничего такого, что можно было бы изучить, проанализировать или усовершенствовать, должен здесь же прекратить чтение этой книги.

1.5. Процесс инженерного проектирования

Поскольку вы продолжаете чтение, вам следует, по крайней мере *временно*, согласиться с тем, что понимание и изучение процесса инженерного проектирования и анализа *может* привести к лучшим результатам. Теперь начнем знакомиться с процессом инженерного проектирования. Напомним, что цель проектирования состоит в разработке при определенных ограничениях, обусловленных способом решения, элемента или системы, оптимально выполняющих поставленную задачу при некоторых ограничениях, налагаемых на само решение.

Первым этапом является изучение и уяснение цели или задачи. Цель может определяться заданием или вытекать из характера работы (например, разработка патентуемого изделия или проектирование верстака для домашней мастерской). В любом случае первым этапом процесса инженерного проектирования является четкое определение цели, которая должна быть достигнута, или требования, которое должно быть удовлетворено. На рис. 1.2 этот этап называется уяснением цели.

Вторым этапом процесса инженерного проектирования является описание более конкретной задачи, которая должна быть решена для достижения общей цели. Если, например, общей целью является получение пресной воды из моря, то возможным путем решения нашей задачи будет создание ядерной энергетической установки для опреснения морской воды методом испарения. Другим путем решения этой же задачи может быть также создание установки для химического опреснения воды или солнечной установки. Заметим, что выбор пути решения задачи предполагает *принятие решения*.

На следующем этапе инженерного проектирования обычно требуется, чтобы инженер-проектировщик получил некоторую идею — новую или старую, по-новому применен-

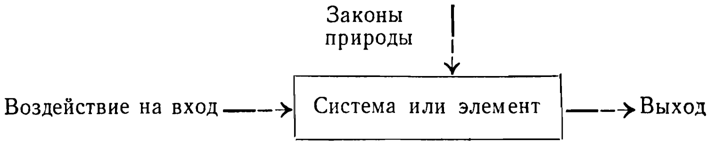
Рис. 1.2. Блок-схема процесса инженерного проектирования.

ную к решению его задачи. Ему нужно сформулировать способ решения или составить общее представление о задаче. Иногда для этого требуется огромное творческое воображение, искусство и изобретательность. Иногда это просто шаблонное применение известного принципа или его пересмотренного варианта. В значительной мере качество решения определяется *качеством* идеи или принципа, использованного на данном этапе. В определенном смысле этот этап представляет собой основу процесса проектирования. На рис. 1.2 он назван формированием идеи.

Как только идея или способ решения задачи найдены (т. е. произошло принятие еще одного решения), инженер должен проанализировать принятую идею. Инженерный анализ требует четкого определения задачи или вопроса, который должен решаться. Он требует построения модели (на бумаге или в лабораторных условиях), которая будет настолько простой, что ее можно будет проанализировать за приемлемое время, и в то же время настолько сложной, что полученные на ней результаты будут достаточно содержательны. Инженерный анализ этой модели должен основываться на применении физических принципов (использовании результатов научных или технических дисциплин) и нахождении численных результатов. Сюда входят также проверка, оценка, обобщение и оптимизация результатов. В данной книге процессу инженерного анализа отводится большое место, поскольку он имеет важное значение для всего процесса инженерного проектирования в целом.

Если в результате анализа получены благоприятные результаты, то инженер должен переработать свое решение с учетом производственных возможностей. Мы называем этот этап *конкретизацией решения*, и возникающие здесь вопросы будут связаны с тем, «как сделать эту вещь?», а не с тем, «как она будет работать?» После этого разрабатываемое изделие будет запущено в производство и затем его начнут распределять, продавать и использовать.

Заметим, что на рис. 1.2, где схематически показан весь процесс инженерного проектирования, мы использовали двунаправленные стрелки. Это должно показать, что в действительности процесс инженерного проектирования не состоит непосредственно из одних переходов от этапа к этапу. При решении любой задачи может потребоваться многократное повторение любого из этапов, и в значительной мере движение будет происходить как вперед, так и назад. Редко задача оказывается столь простой, а инженеру-проектировщику сопутствует такая удача, что идея, пришедшая первой, позволит разработать изделие, которое 1) работает, 2) работает хорошо, 3) работает в оптимальном режиме, 4) может быть изготовлено с небольшими издержками, 5) может иметь сбыт, 6) просто в обслуживании и т. д.



Дано	Найти	Процесс
Воздействие на вход, законы природы, система или элемент	Выход	Анализ (дедукция)
Выход, законы природы, система или элемент	Воздействие на вход	Инверсный анализ
Воздействие на вход, выход, система или элемент	Законы природы	Научные исследования (индукция)
Воздействие на вход, выход, законы природы	Система или элемент	Инженерное проектирование

Рис. 1.3. Другой вариант схемы процесса инженерного проектирования.

На рис. 1.3 показан другой подход к процессу проектирования. На этой схеме задача инженерного проектирования состоит в отыскании системы или элемента, который будет давать определенный выход (результат) при заданном воздействии на его вход. Как показано на этой схеме, другие виды деятельности — науку и анализ — также можно описать аналогичным образом. Задача науки состоит в открытии законов, а задача анализа — в определении воздействия на входе системы для получения заданного выхода или определения выхода по заданному входному воздействию — все зависит от обстоятельств. Вследствие того что анализ связан главным образом с такими случаями, когда задан выход, задача нахождения воздействия на входе при требуемом выходе называется *инверсным анализом*. Это краткое схематическое представление служит наглядной иллюстрацией основного различия между инженерным проектированием и другими видами научно-технической деятельности.

1.6. Качества, необходимые инженеру-проектировщику

Какими же навыками и знаниями должен обладать инженер, чтобы добиться успеха? Это, разумеется, все те качества, которыми обычно обладают люди, достигающие успеха: энергичность, упорство, стремление к совершенствованию, личное обаяние, творческая фантазия и т. п. Это также мастерство и знания, которые теснее связаны с инженерным образованием и которые можно приобрести в процессе обучения. Это, наконец, следующие качества, помогающие успешно решать инженерные задачи:

1. *Изобретательность*, т. е. умение выдумывать или изобретать ценные, полезные идеи или принципы, лежащие в основе вещей или процессов, предназначенных для достижения поставленных целей.

2. *Умение проводить инженерный анализ* — способность анализировать данный элемент, систему или процесс, используя технические или научные принципы с целью быстрого получения правильных решений.

3. *Технические знания* — доскональное знание и глубокое освоение конкретной инженерной специальности.

4. *Широкая специализация* — способность компетентно и уверенно разбираться в основных проблемах или идеях научных дисциплин, лежащих за пределами данной узкой специальности.

5. *Математическое мастерство* — умение в случае необходимости при решении задачи применять мощный математический аппарат и вычислительные методы.

6. *Умение принимать решения* в условиях неопределенности, но при полном и всестороннем учете всех существенных факторов.

7. *Знание технологии производства* — понимание возможностей и ограничений как прежних, так и новых технологических процессов.

8. *Умение передавать информацию о полученных результатах* — способность выражать свои мысли четко и убедительно — устно, письменно и графически.

В этой книге нас будут интересовать главным образом пункты 1, 2 и 6: изобретательство, инженерный анализ и принятие решений. Остальные вопросы рассматриваются в научных, технических, общественных и других специальных дисциплинах.

1.7. Сравнение изобретательства и инженерного анализа

Как изобретательство, так и инженерный анализ являются компонентами инженерного проектирования. Однако есть основания полагать, что навыки, способности и особенности характера, необходимые высококвалифицированному инженеру-изобретателю, в некотором смысле противоположны навыкам, способностям и особенностям характера, необходимым высококвалифицированному инженеру-аналитику. Эта проблема обсуждалась и изучалась преподавателями технических дисциплин, предпринимателями и психологами. Хотя этот вопрос еще нуждается в серьезном изучении, имеющиеся в настоящее время данные определенно указывают на наличие реального противоречия между изобретательской и аналитической деятельностью современного инженера-проектировщика. Поэтому важно, чтобы инженеры знали об этом противоречии и предпринимали шаги к его разрешению.

Рассмотрим снова задачу инженерного проектирования и этапы ее решения. Задача состоит в том, чтобы разработать при некоторых ограничениях, обусловленных способом решения, элемент, систему или процесс с учетом некоторых ограничений, налагаемых на само решение. Хотя решение этой задачи состоит из нескольких конкретных этапов, отображенных на рис. 1.2, обычно бывает необходимо решить два основных вопроса: 1) прежде всего инженер должен предложить метод, схему или идею, которые, по его мнению, отвечают поставленным требованиям; 2) затем он должен количественно проанализировать свой метод, схему или идею, с тем чтобы убедиться, что они удовлетворяют поставленным требованиям при заданных ограничениях. Первый из этих обобщенных этапов является творческим, исследовательским, новаторским. Он требует широких знаний и опыта, умения связать между собой разнообразные элементы и непредвзятого подхода, позволяющего сделать выбор нужного решения при наличии многих вариантов и в случае необходимости отказаться от некоторых из них. В то же время на этапе инженерного анализа требуются глубокие специальные знания, умение выделять и запоминать отдельные факты и владение математическим аппаратом, позволяющие прийти к единственно правильному решению. Эти два этапа совершенно различны по своему характеру, и нетрудно представить себе, что люди, умело справляющиеся с задачей первого этапа, вообще говоря, совсем не обязательно будут хорошо справляться с задачей второго этапа.

Разрешение этого противоречия нужно искать не в том, чтобы постоянно быть полуизобретателем-полуаналитиком. Это мало что даст. Скорее всего разрешение этого противоречия нужно искать в том, чтобы научиться хорошо выполнять и то и другое и уметь полностью переключаться с одного этапа на другой в соответствии с обстановкой.

Нужно изучать специальные технические дисциплины и овладевать мастерством анализа. Распространенная в настоящее время система обучения определенно сдерживает развитие у студентов творческих способностей. Разрешению указанного противоречия способствует также изучение всего, что известно об изобретательстве и творчестве. Понимание различия в характере инженерного анализа и изобретательства позволит серьезному инженеру без особого труда переходить от анализа к изобретательской деятельности и обратно; почти единственное, что здесь требуется,— это умение переключаться с одного вида деятельности на другой.

Почти вся работа студентов во время обучения в колледже носит аналитический характер. Однако изобретательство является важным компонентом инженерного проектирования, и поэтому две последующие главы будут полностью посвящены только этому вопросу.

1.8. Краткие выводы

Эта глава состоит из двух основных частей. Вначале здесь была показана роль техники и инженера в жизни современного общества. Кратко рассматривалась связь инженерного дела с другими видами деятельности человека — наукой, производством, искусством, экономикой и т. д.

Вторая основная часть данной главы посвящена знакомству с процессом инженерного проектирования и предварительному рассмотрению этого вопроса. Были перечислены основные качества, необходимые инженеру-проектировщику, и обсуждалось возможное противоречие между двумя видами деятельности — изобретательством и инженерным анализом. Указывалось, что три этапа инженерного проектирования — изобретательство, анализ и принятие решений — составляют содержание специального предмета, называемого «инженерное проектирование», и что именно этому вопросу посвящена книга.

Теперь, когда мы рассмотрели процесс проектирования в целом, целесообразно более детально изучить три его основные составляющие. Изобретательство, инженерный анализ и принятие решений представляют собой три совершенно различных процесса интеллектуальной деятельности. Изобретательство — это получение или генерация ряда вариантов, инженерный анализ — детальное изучение одного из вариантов, а принятие решений — выбор одного из числа имеющихся вариантов. Поскольку все это различные процессы интеллектуальной деятельности, в данной книге они рассматриваются каждый в отдельности. Вначале изучается изобретательство; ему посвящены гл. 2 и 3. Затем рассматривается инженерный анализ (гл. 4—10), и наконец— принятие решений (гл. 11—17).

Задачи

1.1. Исследуйте ваш учебный план и посмотрите, в какой мере он удовлетворяет разнообразным требованиям к подготовке инженеров.

1.2. Считаете ли вы, что понимание процесса инженерного проектирования позволит вам стать более квалифицированным инженером-проектировщиком? Почему? Можете ли вы найти какие-либо аналогии в других областях? Правильно ли считать, что художник только пишет картины, музыкант только играет, писатель только пишет повести, исследователь только занимается научно-исследовательской работой и т. д.?

1.3. Дайте критическую оценку описания и схемы процесса инженерного проектирования и анализа, изложенных в этой главе. Не было ли что-нибудь опущено? Нельзя ли это сделать лучше?

1.4. Дайте критическую оценку описания и краткого перечня качеств, необходимых инженеру-проектировщику, которые были перечислены в данной главе. Не было ли что-нибудь опущено? Нельзя ли это сделать лучше?

1.5. Какова природа противоречия между изобретательством и инженерным анализом? Каково ваше мнение о высказанном в этой главе предложении относительно его разрешения? Можете ли вы дать иные или дополнительные предложения?

1.6. Не видите ли вы какого-либо естественного противоречия между качествами, необходимыми инженерам для принятия решений, и качествами, необходимыми для изобретательства или инженерного анализа? Обсудите этот вопрос.

ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ

1. Industrial Research, Beverly Shores, Ind., 46301.
Одно из новых периодических изданий. Здесь публикуются статьи, представляющие интерес для инженеров, которые являются проектировщиками в самом широком смысле этого слова.
2. International Science and Technology, Conover-Mast Publications, 205 East 42d St., New York, N. Y., 10017.
В этом периодическом издании публикуются статьи на общетехнические темы по широкому кругу проблем.
3. Johnson L. H., «Engineering Principles and Problems»; McGraw-Hill, New York, 1960.
Превосходное введение в инженерное дело для студентов младших курсов.
4. Krick E. V., «An Introduction to Engineering and Engineering Design», John Wiley, New York, 1965.
Книга, которую можно рекомендовать студентам высших учебных заведений, а также поступающим в технические вузы.
5. *Machine Design*, Penton Publishing Co., Penton Building, Cleveland, Ohio, 44113.

Известный журнал по машиностроению; в нем публикуется много статей по рассматриваемому предмету.

6. *Science*; *Scientific American*, American Association for the Advancement of Science, 1515 Massachusetts Ave., NW, Washington, D. C., 20005.
   Здесь помещаются технические статьи общего характера, представляющие интерес для инженеров.
7. Smith R. J., «Engineering as a Career», 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1962.
   Хорошее описание инженерного дела как специальности для студентов высших учебных заведений и лиц, интересующихся этим предметом.
8. Whinnery J. R. (ed.), «The World of Engineering», McGraw-Hill, New York, 1965.
   Книга, которую можно рекомендовать лицам, не имеющим технического образования, но интересующимся работой инженеров. Ее можно также рекомендовать студентам высших учебных заведений, изучающим возможности инженерного дела как специальности.
9. Wilson W. E., «Concepts of Engineering System Design», McGraw-Hill, New York, 1965.
   Эта книга является очень хорошим введением в проектирование различных систем.

ЧАСТЬ I

ИЗОБРЕТАТЕЛЬСТВО

ГЛАВА 2

ХАРАКТЕР И МЕТОДЫ ИЗОБРЕТАТЕЛЬСТВА В ТЕХНИКЕ

2.1. Цели и ограничения

Психологи приложили огромные усилия, пытаясь проанализировать в чистом виде то особое качество людей, которое называют *способностью к творчеству*, и найти ему меру. Слова «способность к творчеству» часто служат характеристикой некоторого врожденного абстрактного свойства или особенности, присущей человеку. Чтобы избежать принятия допущения (и вытекающих отсюда рассуждений) о существовании данного свойства, в этой книге будет употребляться слово «изобретательность». Под изобретательностью понимается проявляющаяся у людей способность создавать новые полезные идеи для решения инженерных задач. Цель этой главы состоит в том, чтобы наглядно показать, каким путем инженер может добиться большего успеха в отыскании идей. В общем это практическая цель, имеющая вполне определенный смысл. Нам нужны конкретные результаты.

Однако нужно учитывать и некоторые ограничения. Во-первых, следует признать, что наследственность, окружающая среда и подготовка, полученная в прошлом, налагают некоторые весьма реальные ограничения на способность каждого человека к изобретательству. Вполне возможно также, что лишь немногие люди работают, полностью используя свои врожденные творческие способности. Наша цель состоит в том, чтобы описать конкретные способы, позволяющие студентам максимально использовать свои врожденные способности в процессе изобретательства.

Во-вторых, следует признать, что у современных инженеров способность к изобретательству в определенной степени зависит от уровня научно-технической подготовки.

В настоящее время, если исключить лишь очень небольшое число гениальных людей, способных творить по наитию, одной из предпосылок изобретательства является глубокая научная и техническая подготовка в избранной области.

Изложение материала настоящей и следующей глав основывается на молчаливой предпосылке, о которой студентам следует знать. Она состоит в том, что умение изобретать, т. е. способность получать большое число новых полезных идей для решения инженерных задач, можно развивать путем изучения процесса творчества, тренировки и применения методов, рассматриваемых далее в этой главе.

Как правило, большинство инженеров и студентов технических специальностей не любят изучать изобретательство. Здесь слишком много неясного. Инженеры же любят конкретные реальные вопросы и задачи, которые четко сформулированы. Поэтому они чувствуют себя неловко в связи с той неопределенностью, которая окружает все изобретательство. Такая позиция имеет неблагоприятные последствия и наносит ущерб деятельности инженеров. Это приводит к нежеланию заниматься нечетко сформулированными задачами, а следовательно, и новыми задачами, которые всегда сформулированы нечетко. Изобретательность является важным качеством инженера, и хотя сказано и написано много глупостей о способах развития творческих способностей, все же известны и кое-какие полезные и ценные материалы о получении новых идей. Методы, излагаемые далее в этой главе, проверены на практике, но для их успешного применения необходимы определенные усилия, тренировка и трезвая оценка их возможностей. Чтобы лучше понять эти методы, вначале полезно кратко подытожить то, что уже известно психологам об изобретательстве и изобретателях, обсудить сам процесс изобретательства и рассмотреть некоторые важные помехи проявлению изобретательности, обусловленные психологическими особенностями личности. Этим вопросам посвящены три последующих раздела.

2.2. Определение изобретательности

Выше мы определили изобретательность как способность находить новые полезные идеи для решения инженерных задач. Однако теперь желательно иметь несколько более точное и более полное определение. Каковы отличительные признаки тех предметов, процессов, решений задач, идей или произведений искусства, которые принято называть творческими?

Прежде всего, разумеется, следует указать на такое их качество, как *новизна* или *уникальность*. Это очевидное условие, не требующее пояснения.

Во-вторых, творческими называются вещи, которые либо *полезны*, как, например, различные промышленные изделия, либо имеют большую *ценность*, как, например, произведения искусства. И хотя идея, вещь, процесс или картина могут быть новыми или уникальными, но если они никогда не были и никогда не будут кому-нибудь полезны и к тому же ни для кого не представляют ценности, то их уже нельзя считать творческими. В отличие от них творческая вещь либо имеет определенное утилитарное назначение, либо прекрасна, либо обладает тем и другим качествами одновременно.

Третье качество вещей, процессов и решений, которые принято называть творческими, состоит в том, что они вносят *простоту* там, где раньше была сложность. Это качество часто называют *изяществом*. Новые простые решения сложных задач изящны, и их можно назвать творческими. Новые, но сложные решения простых задач нельзя назвать творческими.

Для творческих решений характерно также создание *новых соотношений*. Прежде не связанные между собой элементы при объединении часто дают новый единственный в своем роде эффект, или решение. Эта черта не всегда признается за творческими решениями, но она встречается весьма часто.

Таким образом, любые вещи независимо от того, являются ли они материальными предметами, идеями, теориями, художественными произведениями и т. д., могут называться творческими в том случае, когда они обладают тремя основными признаками: 1) новизной и уникальностью, 2) полезностью или ценностью и 3) изяществом. Читатель, возможно, заметил, что это определение носит качественный характер. Иногда мнения о том, является ли конкретная вещь творческой, разделяются. Тем не менее такое определение полезно, поскольку в большинстве случаев многие согласны именно с таким употреблением этого слова. Следует, однако, иметь в виду, что в этом вопросе нельзя избежать субъективных суждений.

2.3. Характерные черты изобретателей

Какие люди обладают наибольшей склонностью к изобретательству? Отличаются ли они существенно от обычных людей? Это важные вопросы, поскольку ответы на них позволят найти конкретные пути совершенствования способностей к изобретательству. Кроме того, в решении этих вопросов заинтересована промышленность, для которой важно, чтобы люди более творческого склада могли занять должности, соответствующие их способностям.

Была проделана большая работа по определению характерных качеств людей, склонных к изобретательству, с тем чтобы найти зависимости между фактическими результатами их изобретательской деятельности и данными различных стандартных психологических тестов. Например, группу инженеров можно подразделить на две подгруппы — более изобретательную и менее изобретательную — по результатам выполнения ими порученной работы. Затем подгруппы могут быть подвергнуты последовательности психологических тестов с целью определения коэффициента умственного развития IQ[1)], симпатий, антипатий и т. д. Наконец, можно выполнить статистический анализ полученной в результате этого информации и определить, существует ли статистически значимая зависимость между изобретательностью и каким-либо из разнообразных личных качеств инженеров. Такие эксперименты выполнялись, и были получены (см. также [6]) следующие результаты.

Тесты показали отсутствие статистически значимой зависимости между коэффициентом умственного развития и изобретательностью. Однако по поводу этого утверждения необходимо сделать две оговорки. Во-первых, связь между творческими способностями и IQ отсутствует лишь *выше определенного минимального значения коэффициента умствен-*

[1)] Коэффициент умственного развития (Intelligence Quotient.— IQ) применяется в школах и других учебных заведениях, а также в армии США для оценки умственных способностей.— *Прим. перев.*

ного развития, необходимого для выполнения рассматриваемого задания. Это означает, что нет инженеров, обладающих творческими способностями при IQ=90. Однако если IQ оказывается выше необходимого минимального значения, например выше 120, то между уровнем умственного развития и результатами творческой деятельности отсутствует заметная корреляция.

Другая оговорка по поводу высказанного выше утверждения относится к верхнему пределу шкалы умственного развития. При очень высоких значениях IQ (характерных для одаренных людей) наблюдается обратная зависимость между умственным развитием и изобретательностью. Эти результаты были получены несколькими исследователями (см., например, [5]), однако необходимо иметь в виду, что «зависимость» и «отсутствие зависимости» являются статистическими обобщениями; они не означают «все или ничего». Для большинства людей эти результаты просто означают, что пределы умственного развития не обязательно должны налагать ограничения на способность к изобретательству и наоборот.

Проводились также тесты, имевшие целью найти связь между шкалой ценностей человека и его изобретательностью. Для человека представляют ценность те вещи, которые он считает важными, которые его интересуют и которым он естественным образом стремится посвятить свое время и энергию. Оказалось, что более творческие личности (тестам, которые здесь упоминались, были подвергнуты ученые, инженеры и архитекторы) высоко ценят *теоретические* и *эстетические* аспекты вещей и явлений и меньше — экономические и социальные.

Разработаны также психологические шкалы, согласно которым люди подразделяются на определенные, так называемые психологические типы, предложенные доктором Юнгом [7]. Одной из таких шкал является шкала «*рассудочность — восприимчивость*». На одном из концов шкалы находится *рассудочная личность*, которая по любому вопросу решает, как «должно быть». Сталкиваясь с новой ситуацией, такой человек быстро решает (или предрешает?), хорошо это или плохо и как должно быть. Он проявляет меньше интереса или любопытства к тому, какова же эта новая вещь (или явление) и каково ее действие или механизм; его больше интересует собственное суждение об этой вещи. На другом конце этой шкалы находится *восприимчивый человек*, который проявляет основательную любознательность в отношении самих вещей и того, как они действуют, и т. п. Он больше заинтересован в том, чтобы узнать, что представляют собой эти вещи, чем в вынесении суждения о том, какими они *должны быть*.

Те личности, которые по шкале «рассудочность — восприимчивость» оказываются более восприимчивыми, являются и более склонными к изобретательству. Более восприимчивые люди быстрее обогащают свой опыт. Они больше *видят*, больше *слышат*, больше знают и больше запоминают. Следовательно, когда бывает необходимо установить новые соотношения, им удается связать между собой большее число сторон явления. Чем больше суждения рассудочного человека препятствуют его восприятию, тем меньше у него знаний. Есть старая поговорка: «Увидеть — значит поверить». *Это неверно*! Правильным будет перефразированный вариант: «Поверить — значит увидеть». Было выполнено много убедительных экспериментов, подтверждающих это положение. Мы часто воспринимаем или объясняем вещи и явления, как это подсказывают нам наши представления о них. Суждение, которое стоит на пути к восприятию, ограничивает наши знания и, следовательно, препятствует развитию способностей к изобретательству.

Другая характеристика личности связана с тем, каким образом человек выносит суждение. Конечно, в жизни приходится принимать много решений и выносить много суждений. Даже наиболее восприимчивые люди в случае необходимости должны выносить суждения. Можно рассматривать два вида суждений: *суждение, основанное на чувствах*, и *суждение, основанное на размышлении*. Как и следовало ожидать, инженеры в отличие от представителей других профессий относятся к типу людей, выносящих суждения на основе размышления. Однако те инженеры, которые в большей мере полагаются на свои чувства, обычно оказываются более склонными к изобретательству.

Кроме того, людей разделяют на две группы по типу преобладающего характера восприятия: к одной относятся личности с *осознанным восприятием*, к другой — с *интуитивным восприятием*. Люди с осознанным восприятием в большей мере ориентируются на реальный мир и на свои пять чувств. Люди с интуитивным восприятием ориентируются на реальный мир в меньшей степени и стараются больше полагаться на свою интуицию в «видении» вещей и явлений. Инженеры со свойственной им ориентацией на реальный мир обычно обладают осознанным восприятием. Однако те инженеры, которые в большей мере полагаются на свою интуицию, оказываются более склонными к изобретательству. Обратите внимание на то, как это свойство связано со склонностью ценить теорию. Интуиция означает поиск смысла или подоплеки, скрытых за внешними проявлениями реальности. Под теоретическим понимается то, чтó «может быть» или «возможно, будет иметь место». Сходство здесь очевидно. Люди с суждением, основанным на чувстве (в отличие от людей с суждением, основанным на размышлении), естественно, ценят теорию по-иному. В целом склонность к изобретательству сильнее проявляется у восприимчивых людей, у тех, кто стремится к знаниям, у тех, кто любознателен, кто ценит теоретическое и прекрасное и у кого чувства и интуиция развиты в большей степени, чем у его коллег.

Хотя человек и не может в широких пределах изменять свои личные качества, на практике все же возможна одна линия поведения, целесообразность которой подтверждается экспериментально: можно кое-что предпринять для совершенствования восприимчивости. Путем тренировки можно стать более восприимчивым и менее рассудочным. Уроки по искусству, особенно в области живописи или рисования, очень полезны для тренировки визуального восприятия. Сталкиваясь с необходимостью нарисовать какой-нибудь предмет, необходимо прежде всего увидеть его таким, каков он в действительности. Многие люди, весьма далекие от искусства, рассказывают, что уроки рисования помогли им расширить свои познания об окружающем их мире.

Для совершенствования восприятия на первых порах обычно требуется непрерывно вызывать в памяти образ предмета, особенно для того, чтобы привычка выносить суждение не мешала осуществлять точное и полное наблюдение. Эта задача вполне реальна. Смотрите на вещи внимательно. Присматривайтесь к тому, как они действуют. Отыскивайте скрытые элементы или функции. Короче говоря, совершенствуйте свою *восприимчивость*.

2.4. Процесс творчества

Как ведут себя изобретатели, когда они изобретают? (Один физик утверждает, что наилучшие идеи приходят к нему во время бритья.) Нескольких выдающихся изобретателей попросили проследить за своим поведением и описать этапы творческого процесса. Приводим наилучшее описание:

1. Подготовка: накопление знаний и совершенствование мастерства, формулировка задачи.
2. Концентрация усилий: упорная работа с целью получить решение.
3. Передышка: период умственного отдыха, когда изобретатель отвлекается от решаемой задачи.
4. Озарение: получение новой идеи или видоизменение уже известной, которая является искомым решением.
5. Доведение работы до конца: обобщение, оценка.

Эти этапы не обязательно должны идти в строгой последовательности. Периоды работы могут чередоваться с периодами передышки или периодами подготовки к работе (например, накопление знаний и мастерства). Впрочем, озарение обычно следует за передышкой. Следует также учесть, что изобретатели стремятся в какой-то мере реализовать свои идеи. Как бесполезная или неоцененная идея не является творческой, так и нереализованную идею также нельзя считать творческой. Представление об изобретателе как человеке, который многое начинает, но ничего не заканчивает, неверно.

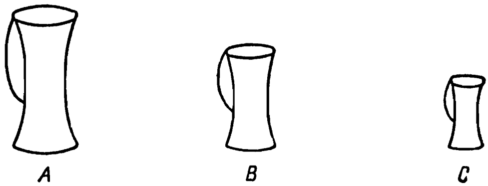
Перечень этапов творческого процесса весьма поучителен. Если от творческой деятельности ждут результатов, то необходимо создать такие условия для решения задачи, чтобы сам процесс изобретательства протекал в наиболее благоприятной обстановке. Если кто-либо берется за решение задачи без должной подготовки или не выделяет времени на концентрацию усилий или на передышку, то вряд ли можно ожидать, что его деятельность окажется плодотворной. При планировании работы полезно иметь в виду особенности процесса изобретательства и обеспечить его успешное протекание.

2.5. Психологическая инерция

В табл. 2.1 изображены три кувшина разной емкости, обозначенных буквами *A*, *B* и *C*. На кувшинах отсутствуют деления, указывающие доли объема. Кувшины используются для переливания определенного количества воды в находящийся здесь же большой сосуд, емкость которого неизвестна. В трех столбцах, обозначенных *A*, *B* и *C*, записаны емкости соответствующих кувшинов в девяти различных задачах. Например, решение первой задачи можно получить, вылив воду из полного кувшина *A* в кувшин *B* до его наполнения и добавив к оставшемуся количеству в кувшине *A* содержимое кувшина *C*. Таким образом, решением является выражение $A—B+C$. Цель этой задачи состоит в том, что-

Таблица 2.1

Найдите простейший способ получения искомой величины в каждой задаче, используя только полные кувшины указанной емкости



Задача	*A*	*B*	*C*	Искомая величина	Решение
1	10	7	5	8	$A—B+C$
2	20	25	11	6	$A—B+C$
3	14	3	2	13	
4	18	10	7	15	
5	11	8	6	9	
6	12	9	7	10	
7	18	23	9	4	
8	13	10	8	11	
9	23	28	14	9	

бы найти искомое количество воды при наименьшем числе переливаний. Желательно также, чтобы эти девять задач были решены как можно быстрее. Чтобы проверить себя, заметьте время, затраченное вами на решение остальных восьми задач. Правильные ответы на задачи приводятся в табл. 2.2, а оценки за скорость решения — в табл. 2.3.

Таблица 2.2

Решение задачи о кувшинах

Задача	*A*	*B*	*C*	Искомая величина	Решение
1	10	7	5	8	$A-B+C$
2	20	25	11	6	$A-B+C$
3	14	3	2	13	$A-B+C$
4	18	10	7	15	$A-B+C$
5	11	8	6	9	$A-B+C$
6	12	9	7	10	$A-B+C$
7	18	23	9	4	$A-B+C$
8	13	10	8	11	$A-B+C$
9	23	28	14	9	$A-C$

Таблица 2.3

Результаты решения задачи о кувшинах [1]

Время, затраченное на получение правильных ответов	Оценка
Менее 2 *мин*	*A*
2—5 *мин*	*B*
Более 5 *мин*	*C*

[1]) Опыт, которым располагает автор, показывает, что около 25% студентов технических специальностей получают правильные ответы для всех задач (см табл. 2.2).

Словами *психологическая инерция* (set) [1] обозначается предрасположение к какому-либо конкретному методу или

[1] В английском языке слово set имеет множество значений. В данном контексте наиболее подходят следующие: установившийся порядок, привычка, тенденция, приверженность к чему-либо, нечто принятое ранее.— *Прим. перев.*

образу мышления при решении задачи. Обычно психологическую инерцию характеризует выражение «идти по проторенной дорожке». По-видимому, это единственная наиболее серьезная помеха изобретательству. Если в задаче о кувшинах вы правильно решили задачу 9, то вас можно поздравить. Значит, вы не поддались инерции в результате решения первых восьми задач.

Эта задача о кувшинах часто используется для иллюстрации психологической инерции. Для последней задачи решение $A—B+C$ нельзя считать неправильным. Оно справедливо, но не является наилучшим или простейшим. Между прочим, по некоторым причинам отдельные студенты начинают решение этих задач снизу. Они неизменно получают для задачи 9 требуемый ответ, поскольку их не вводит в заблуждение последовательность решений $A—B+C$ для предыдущих задач.

Не нужно считать, что всегда вредно следовать установившемуся порядку лишь на том основании, что это послужит возможной помехой для получения творческих решений. Психологическая инерция — это следствие обучения. Если изучен какой-либо конкретный метод, то вполне естественно, что появится желание использовать его снова. Желая преодолеть психологическую инерцию, не говорите: «Забудь, что знаешь» или «Никогда не прибегай к старым методам», а говорите: «Помни, что методов много, а не один». Психологическая инерция — это игнорирование всех возможностей, кроме единственной, встретившейся в самом начале.

Тенденция к использованию определенного метода для решения вырабатывается привычкой либо может определяться складом характера. Каждый из нас испытывал нежелание отказаться от излюбленной идеи. «Склонность к изобретательству» рассматривается как универсальное достоинство. Однако настойчивость, если она заходит слишком далеко, может перерасти в упрямство. Если кто-либо ставит своей целью, несмотря ни на что, реализовать какой-либо конкретный метод вместо того, чтобы найти наилучший, то в этом случае налицо психологическая инерция.

Определенные обстоятельства усиливают психологическую инерцию или способствуют ее появлению; например, нетерпение или состояние напряжения. Немногие получат «правильные» ответы при решении задачи о кувшинах, если они вынуждены торопиться или находятся в состоянии напряжения по другой причине. Этот же эффект обнаруживается и при других обстоятельствах. В условиях опасности или при волнении люди гораздо упорнее придерживаются прежних решений, прежних методов и прежних привычек. При опасности человек редко отваживается на что-либо неизведанное.

Знакомство с вопросом также усиливает психологическую инерцию. Знакомые нам объекты, процессы или идеи редко используются в новом качестве. Существует также эффект, называемый *функциональной устойчивостью* (functional set). Доказано, что предметы, выполняющие в данной ситуации обычные для них функции, редко используются в новом качестве. Например, кусок веревки, лежащий на столе, во многих случаях может использоваться для решения ряда определенных задач. Кусок веревки, который удерживает висящую на стене картину, используется для тех же целей весьма редко. Можно ожидать, что молоток, которым только что забит гвоздь, будет не так часто использован в некотором новом качестве (например, как дверной запор), как тот, который просто лежит без применения. Психологическая инерция, обусловленная знакомством с предметом и его назначением, вполне обычное явление.

Психологическая инерция влияет также и на обучение. Понять — значит увидеть. Экспериментаторы показали, что люди в большей мере стремятся узнать те факты, которые подтверждают их мнения, чем те, которые противоречат их убеждениям. Таким образом, психологическая инерция является серьезной помехой творческому подходу как к общественной и политической деятельности, так и к изобретательской деятельности в области техники.

К счастью, психологическую инерцию все же можно преодолеть. С ней относительно легко справиться, просто *помня о ней*! Если при решении задачи о кувшинах предупредить о необходимости не придерживаться единственного решения, то значительно большее число людей получит требуемые ответы. Доказано, что если и при решении других задач обращать внимание на возможность появления психологической инерции, то ее влияние существенно уменьшается. Таким образом, одно из самых серьезных препятствий изобретательству очень легко устранить. Будьте внимательны, знайте о существовании психологической инерции!

2.6. Тренировка с целью преодоления психологической инерции

Тренировка для преодоления психологической инерции имеет целью разрушить традиционную схему взглядов и представлений. Идея состоит в том, чтобы научиться преодолевать хотя бы на некоторое время привычку человека к данным условиям. В большинстве случаев тренировка в преодолении психологической инерции начинается с определения совершенно незнакомых физических условий. Например, один из способов состоит в описании окружающей среды на некоторой воображаемой планете. (Инициатором этого метода является профессор Стэнфордского университета Джон Арнольд. Он называет свою планету Арктурус-IV.) Затем предлагается разработать проекты инженерных сооружений с учетом этих условий. Обычно задание получает вся группа, с тем чтобы были представлены различные идеи и взгляды. Заметим, что, поскольку в этих условиях традиционные решения неприемлемы, психологическая инерция преодолевается. Например, сила тяжести, если она вообще существует, может быть направлена вверх или по окружности или будет то возрастать, то убывать. Обитатели планеты могут быть одноногими, или слепыми, или же обладать некоторыми сверхчеловеческими способностями. Имеется бесчисленное множество проблем, связанных с проектированием для этой планеты зданий, средств сообщения и т. п. Потрудившись над их решением, человек уже не вернется к земным задачам с убеждением, что существует только единственно возможный способ создания вещей.

Как вариант разработка такого проекта может быть поручена группе, которая должна самостоятельно придумать новую планету, ее науку, окружающую среду, обитателей и т. п. Затем группа может рассмотреть проблемы в области политики, социологии и литературы, а также в области технического и архитектурного проектирования. Ввиду необходимости иметь дело с совершенно необычным миром, его обитателями, обычаями и наукой установившиеся представления будут если не разбиты, то основательно поколеблены.

Тренировка в преодолении психологической инерции требует довольно длительной работы над сложными проектами, и ее лучше всего проводить под наблюдением опытного руководителя. Разумеется, не будет вреда, если группа, не имеющая опыта, попытается провести эту работу и без руководителя. Однако при этом необходимо тщательно спланировать время для накопления идей и принятия решений. Кроме того, для работы над первым проектом отбирайте только энтузиастов, желающих принять в нем участие. Хорошо спланированная работа над проектом такого рода может оказаться и увлекательной, и полезной.

2.7. Предварительные выводы

До сих пор в этой главе высказывались предложения по совершенствованию изобретательности, рассчитанные на длительный срок. Были сделаны следующие конкретные предложения: 1) тренировать свою восприимчивость путем наблюдения за окружающим миром; 2) планировать время и условия работы таким образом, чтобы процесс изобретательства протекал успешно; 3) знать о психологической инерции как основном факторе, препятствующем изобретательству; 4) использовать преимущества, которые дает участие в специальных тренировках по преодолению психологической инерции. Теперь необходимо обратиться к методам, для реализации которых требуется меньший срок и которые можно применять при решении конкретных задач. Тренировка восприятия постепенно развивает способность вырабатывать идеи, но она мало помогает в том случае, когда новая идея нужна именно *сейчас*. Рассматриваемые далее методы имеют целью оказать непосредственную помощь в случае, когда необходимо получить новую идею.

2.8. Метод «мозгового штурма»

Известно, что критика или даже боязнь критики служит помехой творческому мышлению. Разумеется, любая новая идея может оказаться неверной. Если автор боится критики, которая может быть вызвана тем, что идея его плоха, то он не захочет испытывать или высказывать непроверенные мысли. В этом случае многие потенциально хорошие идеи (или мысли, которые могут вызвать эти идеи у других) оказываются потерянными. Чтобы устранить препятствия, вызываемые боязнью критики при генерировании идей, был разработан так называемый метод «мозгового штурма» (brainstorming)[1].

Этому методу уделялось большое внимание в печати в прошлом, поэтому многие уже слышали о нем. Однако его нельзя рассматривать как универсальное средство. С этим методом связаны определенные успехи и неудачи. Для эффективного применения метода «мозгового штурма» необходимо представлять себе его возможности и знать, как и когда его целесообразно применять. Если этот метод применяется правильно и в соответствующих условиях людьми, которые знают, как его применять, то он может служить мощным средством генерирования идей.

Несмотря на распространенное мнение, применять метод «мозгового штурма» все же довольно трудно, и для этого нужна серьезная тренировка. Часто этот метод ни к чему не приводит. Применяя его, необходимо соблюдать следующие правила. Первое из них состоит в том, что любая критика и вынесение суждения — благоприятного или неблагоприятного — не допускаются. Поскольку люди имеют привычку все подвергать критике, такая отсрочка в вынесении суждения — наиболее жесткое и наиболее важное правило.

Второе правило состоит в том, что здесь важно количество. Задача заключается в генерировании *большого числа* идей. Кроме того, одна идея может порождать другую. К тому же нелегко сразу выпалить идею, как только она приходит в голову, не оценив ее (т. е. не вынеся суждения о ней). Однако, когда критика не допускается, каждая идея так же хороша, как и любая другая. При «мозговом штурме» чем больше идей, тем лучше.

Третьим правилом является необходимость *свободно высказывать свои мысли*. Нужны разнообразные идеи. При окончательном разборе, который состоится позднее, мно-

---

[1] Метод «мозгового штурма» иногда называют также «штурмом мозгов» или «мозговой атакой».— *Прим. перев.*

гие идеи окажутся бесполезными, однако сам процесс должен происходить таким образом, чтобы поток идей был бурным и они следовали друг за другом как можно быстрее. При «мозговом штурме» коллективный разум группы должен генерировать непрерывную последовательность идей.

При использовании метода «мозгового штурма» для инженерного проектирования в целях получения наилучших результатов рекомендуется, чтобы члены группы не были лично заинтересованы в рассматриваемой задаче и не были слишком глубоко связаны друг с другом. Очевидно, они должны иметь общее представление о задаче, знать и понимать ее, но не обязаны быть специалистами по рассматриваемому вопросу. Позже специалисты могут дать свое заключение об этих идеях и подробно развить их.

Метод «мозгового штурма» лучше всего использовать для решения задач, которые не являются точными или специальными. При решении очень сложных задач и задач технического характера эффективность применения этого метода менее вероятна, чем при решении задач более общего типа. Например, для его применения больше подходит задача такого типа: «Какую новую продукцию можно выпускать на данной фабрике?», чем задача: «Каким образом можно уменьшить уровень шумов в осциллографе 0/2, используемом для проверки телевизионных трубок типа АВС?»

Как уже говорилось выше, при соответствующих условиях и при наличии людей, знающих, как применять указанные правила, «мозговой штурм» может оказаться ценным методом, позволяющим получать новые идеи. В следующей главе дается стенограмма действительно происходивших занятий по применению на практике метода «мозгового штурма», и вы сможете увидеть, как выглядит этот процесс в развитии. Кроме того, там в конце главы приводятся задачи, рекомендуемые вам для решения.

2.9. Инверсия

Придумать новую задачу очень трудно. Значительно чаще встречаются новые методы решения. Многие новые решения получают благодаря новому подходу к известной задаче. Одним из способов получения новой точки зрения является так называемый метод инверсии. Этот метод требует сознательного преодоления психологической инерции, отказа от прежних взглядов на задачу, с тем чтобы посмотреть на нее с некоторой новой или измененной позиции.

Если некоторый объект обычно рассматривается снаружи, то применение метода инверсии означает, что теперь он будет исследован изнутри. Если в рассматриваемом устройстве некоторая деталь всегда располагалась вертикально, то инверсия означает, что ее переворачивают вверх дном, ставят в горизонтальное положение или помещают под некоторым углом. Если одна часть системы движется, а другая неподвижна, то инверсия означает, что эти части меняются местами. Перевернуть вверх дном, вывернуть наизнанку, поменять местами — эти слова характеризуют существо метода инверсии, используемого для получения новых идей.

Этот метод можно проиллюстрировать на примере. Пусть задача состоит в том, чтобы на конвейере извлекать ядро из грецкого ореха. Все усилия по раскалыванию, распиливанию, разрезанию и тому подобным операциям по тем или иным причинам не увенчались успехом. Принято обдумывать решение этой задачи, находясь *снаружи* ореха. Допустим теперь, что при решении этой задачи применяется метод инверсии, и будем рассматривать ее, находясь как бы *внутри* ореха. Нельзя ли продавить скорлупу изнутри, со стороны ядра? Просверливая в скорлупе маленькое отверстие и нагнетая воздух под давлением, можно расколоть скорлупу и решить эту проблему. Инверсия — очень простой и очень мощный метод получения новых взглядов.

Еще один пример применения метода инверсии для решения реальной задачи приводится в следующей главе.

2.10. Аналогия

Большое число оригинальных мыслей рождается по аналогии, и этот процесс можно с успехом применять для стимулирования новых идей. Часто решение задач подсказывается аналогичными ситуациями, встречающимися в других задачах, в природе или даже в художественной литературе. Использование аналогичных инженерных решений, особенно заимствованных из других областей, для получения новых идей довольно просто, однако здесь уместно показать, каким образом наблюдение за другими вещами значительно расширяет знания, которые можно использовать при решении данной задачи.

Получение идей для инженерных решений путем использования аналогий с механизмами живой природы также несложно, однако для большинства инженеров это очень трудно, так как у них отсутствует даже начальная подготовка в области биологии, и особенно в области физиологии. Природа изобрела так много способов создания различных вещей, что она в изобилии дает новые идеи, которые можно использовать для решения инженерных задач. Например, в природе существуют буквально сотни различного рода «насосов», каковыми являются сердца разных животных.

Для использования аналогий из области литературы необходимо хорошее знание художественной литературы, фольклора, мифологии и научной фантастики. Это означает, что из литературы берется реальная или фантастическая идея и применяется в рассматриваемой инженерной задаче либо самостоятельно, либо в некотором видоизмененном виде или же используется другая идея, подсказанная данной. Например, некоторую идею может дать зеркало Алисы. Лиллипуты из «Путешествий Гулливера» были довольно грамотными инженерами.

Наблюдательный инженер может легко научиться использовать другие инженерные решения для получения новых идей по аналогии. Получение идей на основе использования аналогии с механизмами живой природы более трудно, однако с этой целью для решения специальной задачи можно пригласить медика или биолога. Здесь может также помочь курс лекций по физиологии и анатомии. Труднее всего уловить идеи, подсказываемые литературой,—частично из-за того, что многие инженеры не имеют достаточно времени для чтения (либо у них нет склонности к этому занятию), а частично и ввиду того, что обычно не принято искать новые инженерные идеи в литературе. Все же аналогия является обильным источником новых идей и может использоваться с успехом. В следующей главе приводится несколько примеров, показывающих, каким образом можно ее использовать. Более подробно применение аналогии рассматривается в книге Гордона [6].

2.11. Эмпатия

Эмпатия означает отождествление личности одного человека с личностью другого и проникновение его в чувства другого лица. Эмпатия часто используется в сфере человеческих отношений и, характеризует то состояние, когда приходится ставить себя в положение другого. Этим термином можно определить также и отождествление человека с разрабатываемым предметом, деталью или процессом. Задача состоит в том, чтобы «стать» деталью и посмотреть с *ее* позиции и с *ее* точки зрения, что можно сделать.

В качестве примера рассмотрим снова задачу добывания ядра из грецкого ореха. В разд. 2.9 было показано, каким образом инверсия приводит к удовлетворительному решению этой задачи. Эмпатия также может использоваться для получения решения. Отождествите самого себя с ядром ореха, находящимся под скорлупой. (Там темно, не правда ли?) Чтобы выйти наружу, нужно, чтобы вам помогли *продавить* скорлупу. От уяснения этой задачи до схемы подачи воздуха под давлением остается один небольшой шаг. Важным этапом при решении этой задачи является обдумывание ее, находясь как бы внутри скорлупы. И как инверсия, так и эмпатия сразу же подсказывают нам необходимость этого шага.

Эмпатия требует от человека определенного вхождения в образ. Этому способствуют природная одаренность и нескованность, однако большинство людей могут применять данный метод при соответствующей тренировке. Этот метод очень полезен для получения новых идей.

И эмпатия и аналогия полезны как при работе в одиночку, так и в составе группы. «Мозговой штурм» обычно используется как групповой метод, хотя некоторые утверждают, что его можно применять и при работе в одиночку. При обсуждении «мозгового штурма» указывалось, что воздействие группы на отдельных ее участников нежелательно. Это означает, что группа не должна обсуждать только что высказанную идею, и единственное, что от нее требуется,— это следующая идея. Однако при использовании аналогии и эмпатии, по-видимому, все же лучше более сознательный подход к процессу решения задачи. Необходимо взаимодействие между членами группы. Очень чувствительные, неуверенные в своих силах или застенчивые личности подходят для деятельности такого рода не лучшим образом. Разумеется, всегда нужно проявлять такт, обычно лучше давать идеям благожелательную оценку, чем отрицательную, однако не обязательно, чтобы получение идей всегда происходило методом «мозгового штурма». Как уже указывалось ранее, «мозговой штурм» — специальный метод с присущими ему ограничениями. Аналогия и эмпатия (а также фантазия, о которой говорится далее) предназначаются для сознательного применения в любое время, когда требуется получить некоторую идею [6].

2.12. Фантазия

Фантазия — это воображение, она связана с желанием, чтобы произошло то, чего хочется. Использование фантазии для стимулирования новых идей заключается в размышлении над некоторыми фантастическими решениями, в которых при необходимости используются нереальные вещи или сверхъестественные процессы. Часто бывает полезно рассмотреть идеальные решения, даже если это сопряжено с некоторой долей фантазии. Разумеется, есть надежда, что размышление о желательном может натолкнуть нас на новую идею или точку зрения, которая в конечном счете приведет к новому, осуществимому решению. Примеры использования фантазии также встречаются в следующей главе и обсуждаются в книге Гордона [6].

2.13. Систематическое исследование новых комбинаций

В начале этой главы указывалось, что для вещей и процессов, называемых творческими, характерно, что иногда к ним приходят в результате использования новых соотношений между различными, ранее не связанными между собой параметрами. Это означает, что творческие решения часто находятся путем создания новых комбинаций вещей, процессов или идей. Отсюда следует, что *систематическое* исследование новых комбинаций может оказаться полезным средством, способствующим изобретательству. Этот процесс довольно подробно рассматривается в книге Олджера и Хейса [1], где он называется «морфологическим анализом».

По существу названный метод состоит в том, что в задаче выделяются два или большее число важнейших направлений в зависимости от числа требуемых функций разрабатываемой системы или элемента. Затем по каждому из функциональных направлений производится генерирование идей и составляется как можно больший перечень способов. Наконец, эти перечни сводятся в таблицу, с тем чтобы можно было видеть каждую комбинацию.

Таблица 2.4

Таблица для систематического изучения новых вариантов системы отопления дома

Источник или вид энергии	Передача энергии					
	Воздух	Вода	Нефть	Камни	Электрические провода	Животные
Газ						
Электричество						
Нефть						
Уголь		×				
Ядерное горючее						
Геотермальная энергия						
Солнечная энергия						
Биологический источник энергии						
Дрова						

В качестве очень простого примера рассмотрим систему отопления жилого дома. Пусть этими функциональными направлениями будут *источник тепла* и *средство распределения тепла*. Возможными источниками тепла являются газ, электричество, нефть, дрова, уголь, ядерное горючее, солнечная энергия, геотермальная энергия, колонии биологических объектов и т. д. Возможными средствами передачи тепла являются воздух, вода, пар, электрические провода, камни или другие твердые тела, нефть или другие жидкости и т. д. Теперь можно составить двумерную таблицу (табл. 2.4). Каждая ячейка таблицы означает возможную комбинацию, например источник энергии — уголь, средство передачи энергии — вода (эта ячейка обозначена крестиком). Заметим, что этот метод может привлечь внимание к таким комбинациям, которые в других случаях могут и не прийти в голову. Когда рассматриваются три или большее число функций, получаем трехмерные или многомерные таблицы, однако методика остается прежней.

2.14. Краткие выводы

В первой части этой главы рассматривалось изобретательство в общем плане. Обсуждались существо изобретательства, личные качества изобретателей и процесс изобретательства. Во второй части главы были введены некоторые более конкретные методы, стимулирующие получение идей. В начале главы мы указывали, что стоящая перед нами цель имеет вполне определенный смысл. Нам были необходимы конкретные результаты. Теперь они получены. Чтобы добиться большего успеха при получении новых полезных идей:

1. Тренируйте свою восприимчивость. Старайтесь больше узнавать. Проявляйте больше любознательности в отношении внутренней природы вещей. Не позволяйте предубеждению поколебать ваше мнение. Запомните, что поверить — значит увидеть.

2. Планируя решение стоящей перед вами задачи, имейте в виду процесс изобретательства. Важно уметь организовать как напряженную работу, так и передышку в работе и, если необходимо, чередовать их.

3. Помните о существовании психологической инерции. Используйте возможность участия в тренировках по ее преодолению.

4. Учитесь тому, *как* и *когда* применять метод «мозгового штурма». Запомните правила: никакой критики; чем больше идей, тем лучше; высказывайте мысли без стеснения. Этот метод лучше всего использовать при решении масштабных задач и задач общего характера.

5. Используйте инверсию. Ищите новые подходы, выворачивайте изучаемый предмет наизнанку, ставьте его вверх дном, останавливайте движущиеся части и приводите в движение неподвижные

6. Используйте аналогию с другими инженерными решениями, с механизмами природы (особенно живой природы) и с описаниями из художественной литературы.

7. Используйте эмпатию. Отождествление с разрабатываемой вещью часто приводит к новому взгляду на задачу.

8. Пользуйтесь фантазией. Рассматривая идеальное решение, даже если оно плод одного лишь воображения, можно стимулировать получение новых идей.

9. Пытайтесь проводить систематическое исследование новых комбинаций.

Все эти методы требуют тренировки. Большинство из нас в значительной мере учились изобретательству у своих родителей, преподавателей и других доброжелательных людей. Однако теперь, когда мы уже столь грамотны, нам нужно от этого несколько отойти. Это сделать нелегко. Не ожидайте моментального проявления творческих способностей. Получение новых идей — трудная, зачастую бесплодная работа. Однако вам может помочь тренировка на основе высказанных выше советов.

Прежде чем перейти к гл. 3, следует повторить одно замечание, сделанное в начале этой главы. Изобретательство в технически развитых странах требует серьезной научной подготовки и глубоких знаний соответствующих инженерных дисциплин. Все, что говорилось в этой главе, основано на допущении, что читатель уже имеет или будет иметь такую серьезную научную подготовку, а также глубокие и прочные знания. Только при этих необходимых условиях можно ожидать, что при соответствующей тренировке изложенные здесь методы позволят повысить эффективность вашей деятельности как изобретателя.

В следующей главе главным образом в виде бесед дается ряд примеров инженерного творчества. Там, где это возможно, приводятся указания о применении специальных методов, например эмпатии.

Задачи

2.1. Какие факторы, по вашему мнению, определяют то обстоятельство, что та или иная вещь или явление имеет более (или менее) творческий характер, чем другая?

2.2. Каковы характерные особенности лиц, склонных к изобретательству? Совпадают ли черты, перечисленные в этой главе, с вашими собственными наблюдениями?

2.3. Каковы этапы процесса изобретательства? Вспомните случаи, когда вам удавалось получать хорошие новые идеи. Согласны ли вы с делением на этапы, приведенным в данной главе?

2.4. Что означает «психологическая инерция»? Как ее преодолеть? Вспомните случаи, когда психологическая инерция мешала вам получить хорошие новые идеи. Как вы смогли ее преодолеть?

2.5. Составьте хорошую группу студентов, предпочтительно с различных факультетов вашего университета (если есть возможность, то не только с технических факультетов и факультетов точных наук), и постарайтесь «разработать» отличный от нашего мир. Начните с построения физического фундамента этого мира. В течение определенного периода используйте метод «мозгового штурма». Затем примите решение относительно одной из идей и остановитесь на ней. После этого таким же путем придумайте обитателей этого мира. Рассмотрите их средства сообщения и связи, их здания, религию, политику, правительство, половую жизнь, отдых и т. п. Если вы хотите исследовать различные аспекты этого мира, то разбейтесь на небольшие группы и временно прервите общение между этими группами. Когда все закончат работу, оцените этот проект с точки зрения преодоления психологической инерции.

2.6. Опишите метод «мозгового штурма». Каковы его правила? Почему так трудно его применять?

2.7. Примените метод «мозгового штурма» к интересующей вас задаче. Оцените впоследствии работу вашей группы. Каким образом можно усовершенствовать применяемый вами метод «мозгового штурма»?

2.8. Какие виды аналогии описаны в этой главе?

2.9. Каким образом восприимчивость влияет на изобретательность?

2.10. Выберите какой-либо объект, деталь машины или еще что-либо и отождествите себя с этим предметом, используя личную аналогию. Что «ощущает» этот предмет? Что нужно, чтобы лучше выполнять работу? Что вам необходимо для этого?

2.11. В этой главе предполагалось, что эффективность изобретательской деятельности можно повысить путем изучения творческого процесса, тренировки и использования определенных методов. Согласны ли вы с этим? Обсудите этот вопрос.

2.12. Потренируйтесь в применении методов, описанных в этой главе, к некоторым близким вам задачам. Оцените ваши занятия с точки зрения того, что вам дали эти методы. В чем вы ошибались? Что вы делали правильно? Что можно сделать для совершенствования этого процесса?

2.13. Возьмите в библиотеке книгу Маркса [9]. Исследуйте «двадцать наилучших проектов», о которых там говорится, с точки зрения оригинальности, красоты, изящества и простоты. Возможно, вы посоветуете произвести некоторые замены в этом списке.

2.14. Рассмотрите проект домашней сушилки одежды и проведите систематическое исследование новых комбинаций. После того как вы попытаетесь самостоятельно решить эту задачу, прочитайте статью Маккиннона [8] с целью детального обсуждения метода решения этой задачи.

2.15. Проведите систематическое исследование новых комбинаций при разработке 1) игрушечной ракеты, 2) прибора для выжимания сока из апельсинов в домашних условиях, 3) холодильника, 4) любого другого предмета по вашему выбору. Обратите внимание на необходимость начинать работу с составления соответствующего перечня функций, которые будет выполнять разрабатываемая система.

ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ

1. Alger J. R. M., Hays C. V., «Creative Synthesis in Design», Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.
Эта книга, посвященная творческой деятельности в области техники, содержит исключительно ценное объяснение систематического исследования новых комбинаций. В данной книге этот процесс называется «морфологическим анализом».
2. Buhl H. R., «Creative Engineering Design», Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1960.

Очень хорошая книга, посвященная творческой деятельности в области техники. В книге подчеркивается, что привычка (психологическая инерция) является фактором, сдерживающим творческий процесс. В книге рассматриваются некоторые интересные примеры.
3. Design in America, *Saturday Review*, May 23, 1964, pp. 12—29. В этом номере журнала опубликованы статьи, посвященные творческой деятельности, связанной с инженерным проектированием. Особое внимание обратите на статью «Двадцать лучших промышленных разработок после второй мировой войны».
4. Gardner I. W., «Self-renewal: The Individual and the Innovative Society», Harper and Row, Publishers, New York, 1964. Полезное и интересное обсуждение проблемы сохранения творческого склада у личности или организации.
5. Getzel J. W., Jackson P. M., Creativity and Intelligence, Wiley, New York, 1963.
6. Gordon W. I. I. «Synectics», Harper and Brothers, New York, 1961. Превосходная книга об использовании аналогии для стимулирования новых идей. Приводятся хорошие примеры. Настоятельно рекомендуем прочитать эту книгу.
7. Jung K. G., Psychological Types or the Psychology of Individuation, Lnd., 1953.
8. MacKinnon D. W., Fostering Creativity in Engineering, *J. Eng. Educ.*, **52**, 129 (1961).
Изложение экспериментальных результатов, полученных при изучении творческой деятельности ученых, инженеров и архитекторов.
9. Marks R. W., «The Dymaxion World of Buckminster Fuller», Reinhold Publishing Corporation, New York, 1960.
Превосходное иллюстрированное описание трудов и философских взглядов одного из наиболее выдающихся изобретателей.
10. Osborn A., «Applied Imagination», Charles Scribner's Sons, New York, 1957.
Основатель метода мозгового штурма обсуждает различные способы развития творческих способностей.

ГЛАВА 3

ПРИМЕРЫ ИЗОБРЕТАТЕЛЬСТВА

3.1. Введение

В конце предыдущей главы говорилось о том, что мгновенное творчество изобретателя нельзя считать самопроизвольным актом. Для повышения продуктивности при выработке идей необходимы тренировка, дисциплина и напряженный труд. Психологическую инерцию преодолеть нелегко. Метод «мозгового штурма» освоить трудно. Использовать инверсию или аналогию несколько легче, но для достижения хороших результатов и здесь также необходима тренировка. Пробуя все эти методы впервые, не огорчайтесь, если вас постигнет неудача. Продолжайте свои попытки, тренируйтесь и постарайтесь проанализировать, почему тот или иной метод не приводит к успеху. В конце этой главы даются задачи, которые можно использовать для тренировки. Однако если у вас есть какая-нибудь своя реальная задача, то и она годится для этой цели.

В данной главе изложены некоторые примеры процессов изобретательства. На этих примерах иллюстрируется применение различных приемов и методов, рассмотренных ранее. В них не нужно заниматься оценкой и выбором различных идей, полученных в качестве возможных решений задачи. Важно, однако, чтобы изучение идей, взятых из реальной жизни, завершилось их осуществлением и чтобы решение задачи было доведено до конца. *Это крайне необходимо.* Изучение большого числа идей без полной связи с реальной действительностью способствует бесплодности. По этой причине лучше решать задачи, взятые из реальной жизни, чем задачи из учебника. Однако и задачи из учебника хороши, если хотя бы некоторые из них приводят к выводам, ценным для практики. Повторим еще раз: не ждите, что процесс творчества будет идти легко и быстро. Как показывают приведенные в этой главе примеры, ожидаемых результатов можно добиться только трудом и тренировкой.

3.2. Некоторые творческие решения и нерешенные проблемы

Бóльшая часть этой главы посвящена описанию имевших место занятий, на которых решались инженерные задачи. Кое-что можно получить также, рассматривая и изучая ряд завершенных творческих решений. Вот краткий перечень некоторых результатов технического творчества, известных в настоящее время большинству из вас:

Реактивный самолет с двигателями, расположенными в хвостовой части.

Шаровая головка новой электрической пишущей машинки для вычислительной машины ИБМ.

Чертежные машины.

«Плавающий» пылесос.

Логарифмические «линейки» в форме диска.

Шариковые ручки.

Вы можете дополнить этот список.

Каким образом могли возникнуть эти идеи? Возьмите какую-либо одну из них. Что задерживало их появление? Какой из различных методов, рассмотренных в предыдущей главе, мог привести к их возникновению?

Можно перечислить также большое число нерешенных проблем. Вот некоторые из них:

Мытье окон — эта работа все еще поглощает много ручного труда.

Жилищное строительство — осуществляется так же, как и много лет назад и обходится очень дорого. (Хотя модели сборных домов и обновились, однако строительство их ведется по-старому: элементы изготавливаются на заводе, а не на месте сборки.)

Шум в городах от легковых автомобилей, грузовиков, реактивных самолетов, газонокосилок и т. д.

Безопасность движения автомобилей.

Водоснабжение растущих городов.

Инженерам еще много работы!

Вы можете дополнить данный список. Кроме того, этот перечень может служить хорошим источником идей при проведении занятий методом «мозгового штурма».

3.3. Вибрирующий диск проигрывателя

Один из студентов предложил во время занятий своей группы решить следующую задачу. Проигрыватель, установленный в студенческом общежитии, постоянно вибрирует, и игла все время перескакивает через дорожки. Далее приводится запись беседы, которая происходила в группе. Слева даются примечания, помогающие анализировать, что именно происходит.

Формулировка задачи	БОБ:	Вот моя задача. Стол, на котором установлен проигрыватель, немного качается. Как только кто-либо касается стола, игла перескакивает на другую дорожку. Мне нужен надежный способ зафиксировать ее.
Задача не совсем ясна	ДЖИМ:	Предусмотрена ли какая-либо защита от вибрации?
	БОБ:	Да. Имеются четыре демпфирующие пружины — по одной с каждого угла проигрывателя.
Первая идея. Обратите внимание на психологическую инерцию	ДЖОН:	Может быть, нужны другие пружины — более жесткие или, быть может, более упругие?
Попытка сформулировать задачу	БИЛЛ:	Ты говоришь, что стол качается. Что вызывает вибрацию — вертикальные или горизонтальные толчки?
	БОБ:	Я думаю, что главным образом горизонтальные перемещения. По вертикали пружины работают нормально.
Формулировка задачи	БИЛЛ:	Итак, вот наша задача. Здесь, по-видимому, пружины предназначены только для того, чтобы гасить вертикальные колебания. Мы должны заняться поиском способа, позволяющего избавиться от горизонтальных колебаний. Ну, давайте посмотрим...
Вторая идея. Обратите внимание на психологическую инерцию	ДЖОН:	Горизонтальные пружины! Имеющиеся пружины работают в вертикальной плоскости. Все, что нужно сделать, — это добавить несколько пружин в горизонтальной плоскости.

Обратите внимание на использование своего рода инверсии. Кроме того, преодолевается психологическая инерция, обнаружившаяся в предложении Джона

ДЖИМ: Пружины не должны быть ни вертикальными, ни горизонтальными. Их следует установить под углом. Можно установить их под некоторым углом и вернуться к четырем пружинам.

БОБ: Сейчас стоят вертикальные пружины. Идея об установке пружин под некоторым углом может нас подвести

ДЖОН: Хорошо Перейдем к следующей проблеме

БИЛЛ: Подожди. Мы же только начали. Поищем другие идеи. Попробуем применить некоторые методы, например эмпатию. Эл, ты силен в этом. Вообрази себе, что ты под проигрывателем, и постарайся удерживать его неподвижно, пока я трясу стол. Что при этом происходит?

ЭЛ: (Выходит на середину комнаты, поднимает руки вверх и раздвигает их в стороны, как будто держит над головой большой груз.) Мне нужны бедра на шарнирах. Когда ты поворачиваешь стол, мои ноги тоже поворачиваются вместе с ним, а ведь верхняя часть туловища должна оставаться неподвижной. Нужно иметь бедра на шарнирах, как у тех девчонок, что отплясывают рокси.

ДЖИМ: Шаровая опора...

ЭЛ: (Все еще в той же позе.) Единственное, что можно еще сделать, — это поставить пока проигрыватель на пол и посмотреть, смогу ли я удержать стол неподвижным. Столу можно придать бóльшую устойчивость. Боб, ты говорил, что стол качается. Можно ли его закрепить?

БОБ: Мы уже делали все, что можно. Когда проигрыватель стоит на полу, происходит то же самое, хотя и в меньшей мере. Дрожит весь этот дурацкий дом

ДЖИМ: Шаровая опора все-таки подошла бы. А что если взять шарики? Пусть проигрыватель катается на шариках.

Обратите внимание на аналогию

БИЛЛ: Знаете, нам нужен своего рода „эффект скатерти". Помните, как выдергивают скатерть из-под тарелок? Нам нужно, чтобы при горизонтальной вибрации стола проигрыватель оставался неподвижным.

ЭЛ: (Возвращается на свое место.) Эффект скатерти имеет место вследствие того, что мы преодолеваем трение. Если бы у нас был низкий коэффициент трения...

БОБ: Смазка! Проигрыватель плавает в масляной ванне!

Аналогия

ДЖОН: Или можно использовать воздушную смазку. Это бы сообщило упругость и по вертикали. Один способ — воздушная подушка, другой — воздушная смазка. Как в „плавающем" пылесосе. Но откуда должен поступать воздух?

ЭЛ: Сейчас это не имеет значения.

ДЖИМ: Я думаю, что мы еще не полностью исчерпали возможности опоры на шариках. Если бы мы посадили проигрыватель на шарики, он оставался бы неподвижным, даже если бы стол вибрировал по горизонтали.

БИЛЛ: Да, но при этом нет защиты от вибрации по вертикали.

ЭЛ: А что если поставить упругие шарики? Мягкие! Они будут действовать как пружины по вертикали и как смазка по горизонтали.

Инверсия и аналогия

БОБ: Хорошая идея. Шарики должны быть своего рода противоположностью так называемой „прыгающей замазке". Это вещество деформируется, когда на него давят медленно, но оно не поддается быстрой деформации [1]. Мне нужно то,

---

[1] Вещество с такими свойствами демонстрировалось в 1965 г. в Москве на Международной химической выставке фирмой „Дженерал электрик". Первоначально его назвали „silly putty" — „дурацкая замазка". Оно сочетает эластичность резины с текучестью высоковязкой жидкости. В настоящее время „прыгающая замазка" находит широкое применение, в частности в демпферных устройствах. — *Прим. перев.*

что должно оставаться жестким при медленных движениях, но будет эластичным, когда наносится сильный удар.

ДЖИМ: Хорошо, попытаемся еще раз применить эмпатию по другому поводу. Проблема состоит в том, что игла не остается в канавке пластинки, когда проигрыватель получает горизонтальные толчки.

ДЖОН: Так сделаем звукосниматель более тяжелым, тогда он не будет сдвигаться. Ой нет, это испортит пластинку!

БОБ: Действительно, давление на пластинку должно оставаться прежним.

Эмпатия

ДЖИМ: Подождите. Допустим, что я — звукосниматель. Моя рука — это иголка.
(Джим ложится на пол, вытягивает руку и опускает пальцы вниз, имитируя иглу.)

БОБ: Это не совсем так, Джим. Звукосниматель сбалансирован относительно своей опоры.

ДЖИМ: Все в порядке. Я сохраняю равновесие относительно оси качания. Это можно вообразить. Теперь потрясем пол — я имею в виду стол. Я должен стараться двигаться в такт. Однако в силу своей инерции я остаюсь неподвижным, в то время как все остальное вибрирует.

ЭЛ: Уменьшить вес звукоснимателя!

БОБ: Сохранив при этом заданное давление на пластинку.

ЭЛ: Это можно сделать, отрегулировав противовес относительно опоры звукоснимателя. Можно также уменьшить вес всего проигрывателя.

БОБ: Да, я думаю, что ты прав. Это можно сделать.

ДЖИМ: (Поднимаясь с пола.) Я запачкал рубашку, а Боб получил идею!

Инверсия

ДЖОН: Мы что — вообще отказались от пружин? Боб, ты говорил, что проигрыватель установлен на пружинах. А что если подвесить весь проигрыватель на пружинах?

ЭЛ: Установив их под углом.

БОБ: В чем же здесь преимущество?

ДЖОН: Я не знаю.

ДЖИМ: А почему бы не подвесить проигрыватель к потолку?

БОБ: Весь дом дрожит.

ДЖИМ: Действительно! Подвесив, но на очень длинных пружинах и, возможно, с демпфером, мы бы получили очень большой период колебаний. Своего рода медленное покачивание. Никаких резких движений. И игла, возможно, останется на месте.

БОБ: Возможно, при этом проигрыватель будет работать.

Фантазия

ЭЛ: Тебе нужен волшебный ковер, на который бы ты поставил свой проигрыватель. Прекрасный неподвижный волшебный ковер.

ДЖОН: Как воздушная подушка.

ЭЛ: А почему бы и не обычная подушка? Здесь же целая охапка перьев!

БОБ: Я не думаю, что это подойдет.

ДЖИМ: А это идея! И ее легко проверить!

БОБ: Я получил уже много идей. Достаточно. Я проверю некоторые из них и сообщу вам, что из этого получится.

Приведенный здесь пример не является «мозговым штурмом». Студенты, решавшие эту задачу, свободно использовали аналогию и инверсию, пытаясь получить новую идею. Однако, как и при «мозговом штурме», они совершенно избегали критики и оценки идей в ходе обсуждения. Следующий пример посвящен только методу «мозгового штурма». Обратите внимание на различие.

3.4. Задача о сортировке помидоров

Задача состоит в том, чтобы найти способ быстрого автоматического отделения зеленых (незрелых) помидоров от созревших при их массовой обработке. В некоторых районах фермеры, выращивающие помидоры, считают, что с экономической точки зрения более выгодно убирать весь урожай помидоров со всех плантаций одновременно. Эту работу могут выполнять машины. В этом случае в бункере оказываются перемешанными как зрелые, так и несозревшие помидоры. Каким образом их можно рассортировать? Было проведено занятие для обсуждения этой проблемы методом «мозгового штурма».

ТОМ: Мы сортируем их по цвету. В данном случае, вероятно, нужно применять индикатор цвета.

ЭД: Излучательная или отражательная способность — зеленый помидор должен иметь бóльшую отражательную способность

ДЭЙВ: Твердость. Мы надавливаем на них слегка или притрагиваемся к ним.

ДИК: Электропроводность.

ТОМ: Сопротивление электрическому току.

ДЭЙВ: Магнетизм!

ДИК: Размер. Разве зеленые помидоры не меньше по размеру?

ЭД: Вес Созревшие помидоры будут тяжелее.

ТОМ: Размер и вес должны быть связаны друг с другом.

ДЭЙВ: Размер и вес дают плотность.

ЭД: Удельный объем.

ТОМ: В зрелых помидорах очень много воды, поэтому они имеют удельный объем воды.

ДЭЙВ: Они плавают или тонут?

ДИК: Может быть, сортировать их по плотности — в зависимости от того, плавают они в воде или тонут?

ЭД: Не обязательно в воде, может быть, и в другой жидкости.

ТОМ: Неядовитой.

ДЭЙВ: Соленая вода.

ДИК: Рентгеновские лучи — для определения размера семян или чего-либо подобного.

ТОМ: Запах, аромат.

ЭД: Звук — можно ли прослушать помидор?

ДИК: Может ли помидор слышать?

ДЭЙВ: Тепло — инфракрасное излучение.

ЭД: Теплопроводность.

ТОМ: Удельная теплоемкость.

ДИК: Способность фокусника жонглировать ими.

ЭД: Посадить женщину — пусть наблюдает за ними и нажимает кнопку.

ДЭЙВ: Статистический метод — проверять только каждый второй помидор.

ДИК: Просто потрясти бункер — созревшие помидоры окажутся сверху или снизу.

ЭД: При встряхивании продувать воздух через бункер.

ТОМ: Использовать случайные числа, например пусть каждый третий или седьмой помидор зрелый.

Это занятие продолжалось еще некоторое время, но мы на этом остановимся. Идеи высказываются свободно, подхватываются, сменяются другими в совершенно произвольном порядке. Отсутствие критики делает это возможным. Обычно впоследствии можно составить длинный перечень возможных идей для оценки и дальнейшего исследования. Для эффективного применения метода «мозгового штурма» нужен магнитофон или хорошая стенографистка.

3.5. Новая соковыжималка

Домашние соковыжималки для апельсинов далеки от совершенства. У большинства из них имеется ряд деталей, которые нужно мыть, и, кроме того, домашней хозяйке при выжимании сока приходится прилагать большие усилия. Устройство, в которое можно положить апельсин и получить свежий апельсиновый сок, должно пользоваться спросом на рынке. Далее приводится запись занятия, посвященного решению этой задачи (на этот раз не только методом «мозгового штурма»).

ДЖИМ: Вот наша задача: разработать устройство для выживания сока из апельсинов.

ГАРРИ: Ключ для открывания консервных банок. Кому охота возиться со свежими апельсинами? Кроме того, они слишком дорого стоят. Замороженные ничуть не хуже.

РОДЖЕР: Я не помню, когда последний раз пил свежий апельсиновый сок! Кто-либо из вас пил его когда-нибудь?

КЕН: Я пью. Он значительно вкуснее, чем консервированный. Вы, ребята, потеряли вкус к хорошей пище, по-видимому, вам нравятся обеды, рекламируемые по телевидению!

ДЖИМ: Если бы выжимать сок было не так хлопотно и не так сложно, то натуральные соки потребляло бы больше людей.

ГАРРИ: Возможно. Судя по этому заданию, мне кажется, те, кто торгует, думают так же. В чем недостаток соковыжималок, имеющихся в продаже? Моя жена использует для этой цели жестяную терку — она заплатила за нее десять центов. Все очень просто. Жена разрезает апельсин пополам, кладет эту жестянку на чашку и трет о нее апельсин, при этом ей приходится наклоняться взад и вперед. Все пачкается — стол, руки, и половина сока проливается.

КЕН: У нас для этого есть более механизированная штука. Это ужасно. Нам тоже приходится возиться со своей соковыжималкой не меньше, чем Гарри. Мы тоже режем апельсин пополам, кладем его в коробку и нажимаем на рычаг. Сил моей жены для этого недостаточно. Всего здесь три или четыре детали. Но тоже все пачкается.

ДЖИМ: Ну что ж, в конце концов мы, кажется, поняли задачу.

РОДЖЕР: Да! Все просто: сок из апельсина вылить в стакан. Сделать это быстро и не запачкаться.

РЕЙ: Однажды в Чикаго я видел машину, кажется, на железнодорожной станции, или в аэропорту, или где-то еще. Машина очищала апельсины (это было видно) и выжимала из них сок. Там продавали много сока.

КЕН: Каким образом, по-твоему, очищали эту машину от отходов? Домашняя хозяйка моет соковыжималку только раз в день, а не целый день, как при торговле соком.

РЕЙ: Я не знаю, как ее очищали, если там вообще это делали.

ДЖИМ: А как там разрезали апельсины?

РЕЙ: Механическим ножом, похожим на пилу.

ДЖИМ: А как выжимали сок?

РЕЙ: Не помню.

РОДЖЕР: Мне кажется, что там просто была автоматизирована работа, которую выполняет домашняя хозяйка.

РЕЙ: Точно! Там были рукоятки и вращающиеся детали. Они сделали домохозяйку-робота, выжимающую сок из апельсина.

ДЖИМ: Нам нужна новая идея. Что-нибудь для домашних условий.

ГАРРИ: Мы обычно выжимаем сок из апельсина. А что если его вытягивать оттуда?

РЕЙ: С помощью вакуума. Отсасывать.

РОДЖЕР: Конечно, проделать отверстие — раз! И сок идет.

ДЖИМ: Я в этом сомневаюсь. Ведь в апельсине сок находится в маленьких мешочках.

РЕЙ: Действительно. Я думаю, что это так. А что если использовать своего рода комбинацию нож і и отсасывающей трубки? Резать и отсасывать.

ГАРРИ: Подвижный щуп — с проделанным в нем отверстием. Втыкаем его в апельсин и поворачиваем, вращая. Перемещаясь, он разрезает мякоть апельсина и отсасывает сок.

ДЖИМ: Неплохо. Вся работа должна быть механизирована. Единственное, что нам нужно будет очищать — это щуп.

РЕЙ: Нам нужен вакуумный насос или нечто в этом роде.

ДЖИМ: Все, что мы собираемся делать, должно быть механизировано.

РОДЖЕР: Каким еще способом можно получать сок из апельсина?

ГАРРИ: До сих пор мы выжимали и резали апельсин, а также отсасывали сок.

РОДЖЕР: Выжать что-нибудь можно и другими способами. (Смех.)

ДЖИМ: Как еще получают жидкость из фруктов? Высушивают их.

РЕЙ: Используем центробежную силу.

ГАРРИ: Молодец, Рей! Проделаем в корке апельсина отверстия и приведем апельсин во вращение.

ДЖИМ: А что делать с этими проклятыми маленькими мешочками?

ГАРРИ: Апельсин будет вращаться так быстро, что они разрушатся.

РЕЙ: Мы выкручиваем одежду, чтобы выжать из нее воду, например купальник.

РОДЖЕР: Пусть я — апельсиновый сок, который находится в маленьком мешочке внутри плода. Здесь темно, и мне хочется вырваться наружу. Это все равно, что сидеть в тюрьме за тремя стенами. Моя тесная камера заключения находится внутри другой, более крупной. Я думаю, вы поняли, что это долька апельсина? А все это окружено стеной — кожурой. Как выйти отсюда? Мне нужна помощь. Если бы кто-нибудь мог разрезать стенки моей камеры, а затем высосать меня оттуда!

ДЖИМ: Мы это уже обсуждали. Что еще? Что ты можешь сделать сам, Роджер?

РОДЖЕР: Я не знаю. Я чувствую себя довольно беспомощно. Мне нужно прорваться через стены моей камеры, но я не могу. Мне не на что опереться. Если бы кто-нибудь (или что-нибудь) мог надавить на меня, я, может быть, и смог бы прорвать стенку. Если бы кто-нибудь нажал на мою камеру с одной стороны, то я надавил бы на другую — и так же сильно — я ведь несжимаем!

РЕЙ: Может быть, единственное, что нам нужно,— это раздавить апельсин? При этом прорвались бы и маленькие мешочки.

ГАРРИ: Или расплющить, пропустив его через устройство, подобное машине для отжима белья. Ну, конечно же, положить апельсин в отжимное устройство.

ДЖИМ: А не получим ли мы при этом также и горький сок из кожуры апельсина?

ГАРРИ: Может быть, но нам нужно научиться регулировать размеры камеры и давление в отжимном устройстве так, чтобы избежать этого.

РЕЙ: А как его чистить?

ГАРРИ: Не знаю.

ДЖИМ: А почему все нужно чистить? Вы, ребята, решили, что этот прибор все испачкает. Давайте считать, что все будет чисто! Сможем ли мы работать так, чтобы не испачкаться?

РОДЖЕР: Только в том случае, если не допустим, чтобы сок вытекал.

ДЖИМ: Хорошо, но как это сделать?

РЕЙ: Положить апельсин в пакет. И пропустить пакет и его содержимое через отжимное устройство.

РОДЖЕР: Теперь у нас сок, мякоть, кожура — все будет в одном пакете. А что делать дальше?

ГАРРИ: Процедить сок через сито в стакан.

ДЖИМ: Осторожно: психологическая инерция!

РЕЙ: Каждый раз будет использоваться новый пакет или его нужно промывать? Если он не будет служить повторно, то почему бы не проделать в нем отверстия?

ГАРРИ: Весь сок вытечет из него.

РЕЙ: А мы вставим в него трубочку, и пусть сок через нее вытекает в стакан. Оставшуюся мякоть выбросим вместе с пакетом.

РОДЖЕР: Действительно! Пакет из пластика с трубочкой для однократного использования. Кладем в него апельсин... А может, даже продавать апельсины в таком пакете? Помещаем пакет в прибор. Вся работа ложится на отжимное устройство, сок выжимается, а затем пакет и его содержимое выбрасываются. Прекрасно!

ДЖИМ: Сколько будет стоить такой пакет?

РЕЙ: Это может послужить помехой. Пакеты должны быть дешевыми и в то же время довольно прочными и не прорываться.

ГАРРИ: Знаете, отжимное устройство тоже стоит дорого. Можно ли его удешевить?

ДЖИМ: Я думаю, что мы могли бы выжимать сок, используя отработавшие свой срок прессы.

РЕЙ: Уверен, что это подойдет.

ГАРРИ: Нам нужно изготовить эту ужасную вещь, возможно, она будет работать.

ДЖИМ: Как еще можно получить сок из фруктов?

РОДЖЕР: Мы подогреваем их.

РЕЙ: Сок можно выпаривать.

РОДЖЕР: Можно ли его выделить химическим методом?

ДЖИМ: Это запрещено санитарной службой. Продукты могут соприкасаться только с водой и солью.

ГЕНРИ: Соль...

Прервем обсуждение на этом месте. Мы увидели, как идет работа. Некоторые идеи, полученные методом «мозгового штурма», сознательно развиваются путем применения инверсии, эмпатии и аналогии. Здесь размышляют свободно, одна идея влечет за собой другую. Студенты критикуют идеи или выносят о них суждения, чего вообще не было при «мозговом штурме», однако они делают это мягко и никто не позволяет втянуть себя в полемику. «Мозговой штурм» является способом накопления большого числа идей для последующего их рассмотрения. Цели описанного выше занятия шли дальше — нужно было сразу получить решение. Любой из этих методов (или оба вместе) приемлем, и если их использовать правильно, то они часто приводят к новым хорошим идеям.

3.6. Задача о печатающем устройстве вычислительной машины

Большинство печатающих устройств вычислительных машин имеет молоточек, приводимый в действие магнитом и ударяющий по литере, которая затем прижимается к бумаге. Если между литерой и бумагой поместить красящую ленту (точно так, как в пишущей машинке), то будет отпечатан требуемый знак. Несколько лет назад скорость работы печатающего устройства стала фактором, ограничивающим быстродействие вычислительных машин. По сравнению с быстродействием электронной аппаратуры печатание является относительно медленным механическим процессом. Ускорение процесса печатания стало очень важной проблемой, и инженеры, занятые ее разрешением, проявили огромную изобретательность. Скорость работы современных печатающих устройств увеличилась на несколько порядков.

Не углубляясь здесь в детали этой проблемы (а эти детали многочисленны и разнообразны), можно описать две творческие идеи и показать, каким образом можно было прийти к ним, используя методы, описанные в этой главе.

Один из первых шагов на пути увеличения скорости печатания был сделан в результате применения инверсии: в данном случае движущиеся детали останавливаются, а неподвижные приводятся в движение. Вместо того чтобы подводить литеру к бумаге, инженеры подводят бумагу к литере. Снижение инерции подвижных деталей и в то же время сокращение времени возвращения детали после операции позволили значительно увеличить скорость печатания. Обратите внимание на то, что к этой идее могло привести сознательное применение инверсии.

Вторая идея, принцип которой также легко изложить, возникла в связи с тем, что при увеличении скорости прежние детали уже не могли работать. Раньше более ста литер составляли цепь, весьма напоминающую велосипедную. Эта цепь монтировалась на двух зубчатых колесах, которые непрерывно вращались. При прохождении набора литер молоточки, управляемые магнитом, выборочно, как этого требует электронная схема, приводились в движение. Если скорость этого процесса резко возрастала, то цепь разрывалась. Нужно было найти новый способ перемещения литеры по бесконечной круговой дорожке.

Вообразите себе, что вы — литера, которая больше не связана с цепью. Как бы вы смогли выполнять свою работу? Если смотреть с этой точки зрения, то ваша задача — стать в ряд и продолжать движение. Решение: поставить литеры на «рельсы», как вагоны поезда, однако не соединяя их друг с другом. Гонять только «локомотив». Если весь замкнутый путь заполнен, то двигаться должен весь набор литер. Цепь не нужна. Эта идея была осуществлена. Цепь была просто устранена.

Что дальше? Вернуться назад и приводить в движение литеры? Вертикальная цепь литер вместо горизонтальной? Или под углом? Пневматические молоточки? Аналогия, эмпатия, инверсия — вот что может помочь найти в дальнейшем важные идеи.

3.7. Водоснабжение

В качестве последнего примера рассмотрим проблему водоснабжения, исследовавшуюся группой студентов методом «мозгового штурма». Нехватка воды представляет собой серьезную проблему в отдельных районах США и во многих других частях мира. По мере индустриализации стран и роста населения эта проблема станет еще более острой. Все больше и больше хорошей пресной воды будет требоваться во все новых и новых местах.

ДЖОРДЖ: Дождевая вода.

ГОРДОН: Каждый может иметь у себя бочку для дождевой воды.

ДОН: Или собирать ее с крыши своего дома.

СТЭН: Большая воронка над каждым домом, когда идет дождь.

ГОРДОН: Крыша, сохраняющая дождевую воду.

ДЖОРДЖ: Вызывать дождь искусственным путем.

СТЭН: А что если загонять облака в большой мешок и доставлять их туда, где они нужны?

ДОН: Нельзя ли создать магнитный или электрический «мешок»?

ГОРДОН: Большие вентиляторы на земле, управляющие воздушным потоком.

ДЖОРДЖ: Обширные горячие или холодные зоны на поверхности Земли для создания восходящих или нисходящих воздушных потоков.

СТЭН: Построить высокую, как горный хребет, стену и регулировать воздушный поток.

ДОН: На ней можно установить жалюзи; открывая и закрывая их, можно будет в какой-то степени регулировать воздушный поток.

ДЖОРДЖ: А что если сохранять выпавший зимой снег? Весной у нас всегда слишком много воды, а потом ее не хватает.

СТЭН: Хранить его в большом холодильнике.

ДОН: Или просто в больших кучах.

ДЖОРДЖ: Зачем? Пусть он тает, но вначале нужно сгрести его в большое водохранилище.

ГОРДОН: Построить побольше постоянных запруд и водохранилищ.

СТЭН: А как предотвратить большие потери воды за счет испарения?

ДОН: Защитить водохранилища радиационным экраном.

ГОРДОН: Накрыть их.

СТЭН: Заморозить их.

ДОН: Сделать их более глубокими — уменьшить отношение площади поверхности к объему.

ГОРДОН: Накрыть их химической пленкой.

ДЖОРДЖ: Вырыть побольше колодцев.

СТЭН: Найти способ собирать грунтовые воды, прежде чем они стекут.

ДОН: Небольшие водохранилища на каждой улице, на каждом участке.

ДЖОРДЖ: Упорядочить поливку газонов.

СТЭН: Заставить людей применять автоматические поливочные машины, которые не допускают перерасхода воды.

ДОН: Найти заменитель воды в таких случаях, как бритье, промывание туалетов, стирка.

СТЭН: Мне нравится идея о заменителе. У нас есть электрические бритвы, химические туалеты, сухая чистка одежды — что еще?

ДЖОРДЖ: Алкоголь!

ДОН: Пиво!

СТЭН: Вино!

ГОРДОН: Сменим тему! Кому нужна вода?

ДОН: Очень многим нужна вода. Много воды потребляют промышленность, винодельческие предприятия, пивоваренные заводы.

ДЖОРДЖ: Туалеты, но они расходуют воды намного меньше.

ДОН: В стиральных машинах одна и та же вода используется многократно.

СТЭН: В фонтанчиках для питья вода циркулирует.

ДОН: Машина для мытья посуды также использует одну и ту же воду многократно.

СТЭН: Нам нужно устройство для очистки воды.

ГОРДОН: Да, для очистки загрязненной воды или опреснения морской.

ДОН: Кипятить ее.

СТЭН: Замораживать.

ДОН: Фильтровать.

ГОРДОН: Использовать химические препараты.

ДЖОРДЖ: Готов спорить, что много воды теряется за счет утечки из водопроводных труб. А что если оборудовать сигнализацию об утечке воды из труб?

СТЭН: Такая сигнализация должна быть в каждом доме.

ГОРДОН: А что если иметь два водопровода: один с питьевой водой, а другой — с водой для иных нужд?

ДЖОРДЖ: Воду можно использовать два-три раза, прежде чем она попадет в канализационные трубы.

ДОН: Деревья. Деревья потребляют много воды. Что делать с ними?

ДЖОРДЖ: Не знаю. А как насчет других растений?

СТЭН: Или животных?

ДЖОРДЖ: Смогут ли они жить, потребляя что-либо иное?

СТЭН: В старом школьном учебнике воду называют «универсальным растворителем». Нельзя ли придумать другой универсальный растворитель?

ГОРДОН: Вода используется в установках для кондиционирования воздуха.

СТЭН: Нужны холодильники с воздушным охлаждением.

ДЖОРДЖ: Более эффективные холодильные камеры.

ГОРДОН: Безводная холодильная установка.

СТЭН: Накрыть океан, чтобы предотвратить или регулировать испарение.

ДЖОРДЖ: Нет, нам нужно усилить испарение воды из океана. На Земле очень много воды. Нам нужно лишь ускорить ее круговорот.

СТЭН: Правильно! Каким образом можно ускорить испарение воды из океана?

ДЖОРДЖ: Подогревать воду.

ДОН: Размешивать. Заставить ее фонтанировать, чтобы бил целый лес фонтанов.

ГОРДОН: Положить что-нибудь в океан, чтобы увеличить давление пара.

СТЭН: Образовать турбулентные потоки воздуха у поверхности океана, быстро отводить вверх влажный воздух.

ДОН: Подавать сюда воздух из пустыни.

Разумеется, эта беседа может продолжаться бесконечно. Примерно за час «мозгового штурма» можно получить очень много идей, а затем некоторые из них этим же методом можно развивать дальше, как, например, упоминавшуюся здесь идею об установке для опреснения морской воды. Не забывайте правила: никакой критики; размышляйте свободно; чем отдаленнее идеи, тем лучше; пусть идеи идут потоком. Этим правилам нелегко следовать, поэтому помните — нужна тренировка!

3.8. Краткие выводы

На этом завершается обсуждение изобретательства. В следующей главе начинается более детальное изучение инженерного анализа. При решении большинства инженерных задач первым этапом является получение идеи, указывающей, каким образом можно достигнуть поставленной цели. Остальная часть процесса решения задачи определяется качеством идеи или принципа, положенных в основу решения. Это работа инженера, и она представляет собой творчество. А творчество инженера является изобретательством.

В гл. 2 обсуждение изобретательства началось с утверждения, что наследственность, окружающая среда и подготовка, полученная в прошлом, ограничивают наши творческие возможности, однако лишь немногие люди работают, полностью используя свои врожденные способности. Поэтому любой человек может попытаться развить свои способности к творческой деятельности. В гл. 2 этот вопрос рассматривался с психологической точки зрения. Там же излагались некоторые конкретные методы совершенствования творческой деятельности: «мозговой штурм»; преодоление психологической инерции; применение инверсии, аналогии, эмпатии; участие по возможности в тренировках по преодолению психологической инерции и т. д. В гл. 2 говорилось также о некоторых обычных вещах, которые доступны всем: тренировка восприимчивости, воздержание от суждения о предмете без необходимости, исследование новых соотношений и т. д. В настоящей главе были приведены примеры, показывающие применение этих методов на практике. Ни один из этих методов не является универсальным, но они показывают, что не следует отчаиваться, когда требуется идея. Нужно просто проделать определенную работу.

Несколько заключительных слов. Для успешного применения этих методов нужны тренировка и напряженная работа. Все рассмотренные в этой главе примеры иллюстрируют довольно успешное применение методов решения задач. Здесь все идет как по маслу. Однако так бывает не всегда, особенно когда участвуют люди, не имеющие должного опыта. Иногда вообще ничего не получается. Временами такие занятия протекают утомительно и скучно. Успех приходит с тренировкой, и, как свидетельствуют приведенные здесь примеры, различные методы действительно способны помочь и часто приводят к полезным результатам.

Задачи

3.1. Укажите места в примере с домашней соковыжималкой, рассмотренном в этой главе, где используются различные методы стимулирования творческой фантазии.

3.2. Рассмотрите методом «мозгового штурма» проблему борьбы с загрязнением воздуха.

3.3. Рассмотрите методом «мозгового штурма» разрешение проблемы дорожно-транспортных происшествий и несчастных случаев на автомобильном транспорте.

3.4. Рассмотрите задачу создания автоматической установки для изготовления кубиков льда.

3.5. Рассмотрите задачу разработки метода измерения поверхностного натяжения и вязкости жидкостей.

3.6. Рассмотрите проблему транспортировки людей с этажа на этаж в универсальном магазине.

3.7. Рассмотрите проблему мытья окон.

3.8. Составьте несколько своих задач и решите их.

3.9. Рассмотрите методом «мозгового штурма» проблему подготовки инженеров.

3.10. Рассмотрите методом «мозгового штурма» проблему питания в глобальном масштабе. (Несмотря на временное изобилие продуктов в Соединенных Штатах, значительная часть населения земного шара недоедает.)

3.11. Рассмотрите проблему посадки ракеты на Луну. Помните, что свойства поверхности неизвестны.

3.12. Рассмотрите методом «мозгового штурма» проблему поглощения энергии при столкновении элементарных частиц.

3.13. Рассмотрите методом «мозгового штурма» задачу создания запасов энергии.

3.14. Можно разработать игрушечные ракеты, в которых в качестве «горючего» используются вода и воздух. Эти ракеты на одну-две трети объема заполняются водой и затем в них накачивается воздух, например до давления 3,5 *кг/см²*. Эти ракеты поднимаются на высоту 60—100 *м*.

3.15. Рассмотрите методом «мозгового штурма» проблему привития студентам технических специальностей большего интереса к новым и нечетко сформулированным задачам.

3.16. Рассмотрите методом «мозгового штурма» проблему развития у студентов технических специальностей способностей к техническому творчеству.

ЧАСТЬ II

ИНЖЕНЕРНЫЙ АНАЛИЗ

ГЛАВА 4

ВВЕДЕНИЕ В ИНЖЕНЕРНЫЙ АНАЛИЗ

4.1. Введение

Инженерный анализ, краткое знакомство с которым состоялось в гл. 1, связан с использованием основных физических принципов для решения задач с целью получения за приемлемое время приемлемых решений. Важным положением здесь являются: *основные принципы*, *приемлемое время решения и приемлемое* (*имеющее смысл*) *решение*. Выполняя инженерный анализ, инженер должен знать об ограничениях, свойственных избранному способу решения задачи. Например, ему необходимо знать, означают ли слова «приемлемое решение», что полученный результат должен со 100, 10 или 1%-ной вероятностью соответствовать точному (т. е. идеальному) значению. Инженер должен также представлять себе, означает ли «приемлемое время решения» сутки, неделю или год. Кроме того, он должен знать о своих недостатках и сильных сторонах и о возможностях находящихся в его распоряжении вычислительных устройств и аппаратуры для экспериментальной работы.

Основное положение, развиваемое в этой книге, можно сформулировать так: «правильное» решение задачи инженерного анализа «правильным» методом возможно лишь при учете ограничений, с которыми сталкивается инженер, решающий эту задачу. Квалифицированные инженеры при решении задачи выбирают те методы, которые совместимы, с одной стороны, с их целями, а с другой стороны, с ограничениями, свойственными данному способу решения. Эта часть книги до гл. 10 включительно посвящена разработке методики инженерного анализа, в которой главный упор делается на применение основных законов природы (а не на приобретение специальных знаний), на способы принятия допущений и на необходимость понимания ограничений, свойственных тому или иному способу решения задачи.

4.2. Метод инженерного анализа

Нельзя найти такую методику, которая будет одинаково пригодной во всех случаях. Чтобы избранная методика дала эффект, ею нужно пользоваться гибко, как руководством к действию, а не смотреть на нее догматически как на ритуал. Методика может привлечь внимание к важным или сложным вопросам, вызывающим затруднения у многих инженеров. Она может служить средством самопроверки, своего рода тихой гаванью при шторме или исходным пунктом для дальнейшего движения. Не ждите, однако, что можно получить стандартную формулу для решения ваших задач. Ее не существует. На каждом шагу необходимо мыслить четко, ясно, напряженно, творчески. Нужно знать свой вопрос и понимать его. Методика решения задачи — средство, мобилизующее ваши знания, но не заменяющее их. На рис. 4.1 схематически показаны основные этапы решения инженерных задач. В какой мере это согласуется с вашими собственными представлениями о данном предмете?

Определение задачи, ее конкретизация. Хотя совершенно очевидно, что это самый первый этап, однако именно здесь совершается много ошибок. Задача, сведенная к конкретному вопросу, позволяет выразить получаемое решение через величины, которые можно затем вычислить или измерить. Другими словами, нужно ставить такой вопрос, на который можно получить количественный ответ. Это не всегда легко сделать. Для этого нужно перейти от реальной физической ситуации к задаче, выраженной в форме конкретного вопроса. Например, недостаточно поставить вопрос: будет ли система работать? Такой вопрос не является конкретным. Вместо этого нужно ставить вопросы такого характера: какова выходная мощность силовой установки, если к ее входу подводится 5000 *ккал/сек*? Для подготовки рабочих условий задачи и их конкретизации необходимы определенный навык, понимание вопроса и умение рассуждать. Обычно каждый из нас может поставить вопрос в общем виде (например, будет ли система работать? будет ли температура слишком высокой? быстро ли будет затухать вибрация?).

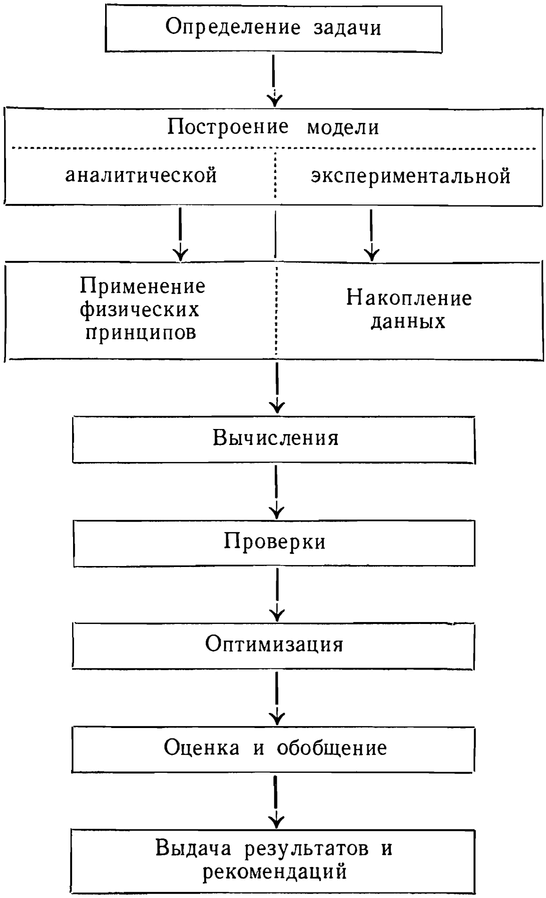


Рис. 4.1. Схема процесса инженерного анализа

Однако для решения задач инженерными методами прежде всего необходимо определить, что́ в действительности означает такое обобщение. Какая именно температура является «слишком» высокой? Что в секундах означает «скоро»? Инженер, занимающийся инженерным анализом, должен начинать работу с определения задачи, для которой можно будет получить *количественное решение.*

Построение модели и принятие допущений. Следующим этапом процесса решения задачи, также причиняющим много неприятностей, является построение модели. Модель представляет собой идеализированное приближение к реальной ситуации. Построение хорошей аналитической модели предполагает принятие допущений, учитывающих относительную важность различных элементов задачи. Очень

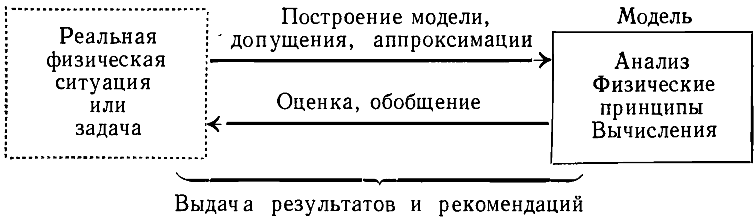


Рис. 4.2. Схема процесса инженерного анализа.

часто студенты спрашивают у профессоров, а молодые инженеры — у более опытных коллег: «Как вы узнали, что нужно было принять именно это допущение?». Иногда такие вопросы возникают в связи с отсутствием опыта, что приводит к принятию неудовлетворительных допущений. Во многих же случаях у студента или молодого инженера просто нет возможности принять допущения из-за неумения обдуманно построить аналитическую модель ситуации. Впрочем когда им подсказывают сделать это, в большинстве случаев молодые инженеры принимают допущения довольно верно. Однако когда они работают в одиночку, то сказывается отсутствие руководителя или более опытного инженера, который смог бы направить их мысль по правильному пути. Если с самого начала строят достаточно простую модель реальной ситуации, то в этом случае внимание сразу же будет привлечено к тем критическим аспектам, которые требуют принятия допущений. На рис. 4.2 схематически показан процесс построения модели при инженерном анализе.

При решении задач используются не только аналитические модели. Многие задачи быстрее и легче решить путем построения экспериментальной модели. Не обязательно, чтобы эксперимент в точности дублировал реальную физическую ситуацию, поскольку это все-таки модель, и тем не менее он может дать требуемые результаты.

Во многих задачах требуется строить комбинированные (аналитические и экспериментальные) модели. Часто бывает необходимо получать отдельные экспериментальные результаты, которые в виде соответствующих числовых значений нужно затем вводить в теоретические выражения. В то же время теоретические исследования могут подсказать, какого рода эксперименты наиболее целесообразны.

Построение модели — это процесс абстрагирования. Модель — это не реальность, а плод воображения инженера. Вся хитрость при построении модели состоит в том, что для получения решения модель должна быть достаточно простой, и в то же время она должна отражать существо задачи, чтобы найденные с ее помощью результаты имели смысл.

Применение физических принципов и накопление данных. После построения аналитической модели можно воспользоваться знаниями и методами научных и технических дисциплин. Модель можно проанализировать, используя первый закон Ньютона, уравнение количества движения или какой-либо иной подходящий в данном случае физический принцип. Студенты получают большую практику по применению физических принципов при изучении предметов по своей специальности. Одно хорошее правило, на которое не всегда обращают внимание, гласит: «При решении любой задачи всегда используйте *наиболее общий принцип.* Специальные и сложные методы или уравнения используйте лишь в тех случаях, когда вы абсолютно уверены, что они применимы и когда ничто более простое не подходит».

Следующим этапом после построения экспериментальной модели является накопление данных. В ходе лабораторных занятий можно приобрести необходимую для этого практику. Нужно научиться выполнять эту работу быстро и без больших затрат. Напомним, что при решении задач всегда имеют место ограничения, обусловливаемые такими факторами, как время, деньги, оборудование и т. д.

Вычисления. После применения теории и записи уравнений задача сводится к нахождению числовых результатов. Если это можно сделать аналитическими методами — прекрасно. Решайте задачу таким способом. Однако, когда это невозможно (а это при решении новых задач случается весьма часто), все равно *нужно* получить числовой результат за приемлемое время и при допустимых затратах. В таких случаях очень удобны графические методы. Распространенные в настоящее время вычислительные машины делают численный анализ вполне обычной операцией. Современные инженеры должны разрабатывать аппаратуру, позволяющую получать числовые результаты. Если мощные математические методы не позволяют получить результат (иногда это бывает), то все равно нужно продолжать поиск. Имейте в виду, что при инженерном анализе *необходимо* получить числовой результат любым способом.

Наконец, в случае экспериментальной модели на данном этапе необходимо проанализировать полученный результат. Для этого часто требуется выполнить статистический анализ или анализ размерности.

Проверки. Проверки нужно проводить на каждом этапе, а не только в конце работы. Обычно выполняются проверки двух видов: математические проверки и проверки, которые мы производим, исходя из физического смысла. Некоторые математические проверки, например арифметическая проверка, проверка правильности записи формул и т. д., общеизвестны, и обычно каждый из вас выполняет их. Проверка размерности по своему характеру также является математической, однако большинство студентов применяют ее далеко не в полной мере. *Каждое уравнение должно быть правильным с точки зрения размерности.* Кроме того, должны удовлетворяться граничные условия. Проверка их является хорошим способом обнаружения как принципиальных ошибок, так и ошибок, допущенных по невнимательности.

Проверка модели или выражения, исходя из физического смысла, очень важна, но она также очень редко используется студентами. Верны ли полученные уравнения? Если одна величина возрастает, то ведут ли себя остальные величины так, как это ожидалось? Очень хорошей проверкой, основывающейся на физическом смысле, является проверка пределов. Если какая-либо величина приближается к некоторому пределу (нулю, бесконечности или некоторой другой величине), то ведет ли себя уравнение так, как это ожидалось? Существуют ли другие существенные величины, которые не входят в уравнение? Все ли существенные факторы рассмотрены? Наконец, имеют ли вообще смысл полученные числовые результаты? Был, например, случай, когда один студент заявил, что *игрушечная* ракета может подняться на высоту 2200 *м*!

Проверки играют важную роль. Они позволяют сэкономить много времени и денег, а также избежать затруднений в процессе работы. В одной фирме среди инженеров ходит поговорка: «Никогда не хватает времени сделать правильно сразу, но всегда есть время для переделок». Оставляйте всегда немного времени для проверок. Всегда дешевле сразу же сделать правильно, чем потом переделывать заново.

По этому поводу следует высказать еще одно замечание. Бумага стоит дешево. Ошибки же обходятся дорого. Расходуйте побольше бумаги, пишите только на одной стороне листа. Будьте аккуратны.

Оценка и обобщение. При изучении технических дисциплин такие этапы, как формулировка задачи и построение модели, рассматриваются редко. Совершенно правильно, что при изучении этих предметов все внимание концентрируют на применении физических принципов и выполнении вычислений. За этапом вычислений следуют еще два этапа, которые также редко рассматривают при изучении технических дисциплин, это оценка и обобщение. Теперь, когда нами получен некоторый числовой результат, его нужно оценить. Кроме того, нужно установить, можно ли сделать обобщения, которые дадут нечто большее, чем просто решение конкретной задачи. Это важные этапы, и если их не выполнить, то может оказаться, что решение задачи было получено напрасно. В примерах, которые приводятся в этой и последующих главах, подробно рассматриваются оценка и обобщение результатов.

Оптимизация. Оценка результатов может предусматривать оптимизацию либо оптимизация может быть составной частью анализа вычислений. В следующей главе оптимизация рассматривается более подробно. Как и проверка, оптимизация пронизывает весь процесс разработки, инженерного анализа и принятия решений.

Инженерный анализ был представлен здесь в виде последовательности этапов. В действительности же такая картина встречается довольно редко. Имеет место непрерывный итеративный процесс. Планы могут изменяться. Может потребоваться многократное решение одной и той же задачи, прежде чем будет получен удовлетворительный результат. Отметим еще раз, что на процесс решения задачи налагаются ограничения, обусловленные такими факторами, как время, деньги, оборудование и квалификация специалистов. Вообще говоря, предметом этой книги и является оптимизация процесса решения задачи при этих ограничениях, которую осуществляют с целью получения результата с требуемой точностью. Нельзя получить «правильного» решения задачи, если не ясна цель и не известны ограничения. Чтобы хорошо решать задачи, нужна практика.

Представление и выдача результатов и рекомендаций. Когда результаты получены, работа еще не закончена. Полученные результаты нужно сообщить другим лицам. Часто бывает необходимо составить рекомендации. Их также нужно сообщить другим лицам. Выдача этой информации — еще один процесс, который необходимо оптимизировать. Чтобы повысить его эффективность, нужно исходить из конкретных условий (ограничений), а также принимать во внимание характер информации, которая должна быть выдана. При изложении результатов важную роль играют грамматика и правописание. Грамматические ошибки и неграмотное построение речи приводят к тому, что читатель или слушатель теряет доверие к автору письменного или устного сообщения. Кроме того, грамотная и ясная речь значительно повышает вес высказываемых идей. И это сказано не ради красного словца! Точно так же, как идею нельзя считать творческой, пока она не претворена в жизнь, так и от рекомендаций мало проку, пока они не приняты. Для успешной работы инженеру крайне необходимо умело подавать информацию о полученных результатах.

Часто бывает необходимо составить подробный отчет на сотню страниц, который хранится на тот случай, если когда-либо кто-либо пожелает заново пересмотреть разработанную конструкцию или найти иное применение уже выполненной работе. Однако информация, передаваемая в качестве основы для принятия решений, обычно должна быть более краткой. (Однажды автор выполнял работу для руководителя, который настаивал на том, чтобы отчет не превышал одной страницы. Этот руководитель отказывался читать отчет даже на двух страницах. Он требовал, чтобы инженеры сообщали ему только существо полученных ими результатов и выработанных рекомендаций. Если его интересовали детали, он задавал вопросы. Другой предприниматель вообще не принимал отчетов в письменном виде. Он требовал краткого устного изложения сделанных рекомендаций. После этого он выслушивал объяснения инженера по поводу каждого высказываемого им возражения.)

Итак, вопрос сводится к следующему. Инженер должен уметь излагать существо полученных им результатов и выработанных рекомендаций в такой форме, чтобы читающий или слушающий мог быстро и легко понять его. Составлять и писать такие короткие отчеты очень трудно — значительно труднее, чем излагать все подряд.

Первым этапом инженерного анализа является уяснение задачи, а последним — выдача информации о полученном решении. Оба эти этапа, так же как и один из промежуточных, связанный с применением физических принципов, являются инженерными по своему характеру. Данная глава завершается рассмотрением примера, цель которого—проиллюстрировать процесс инженерного анализа.

4.3. Пример инженерного анализа: жидкостная смазка, используемая при волочении проволоки

Волочение проволоки является важной операцией металлообработки. Проволока используется для изготовления гвоздей, крючков для одежды, электрических проводов и тысячи других вещей. Сам процесс волочения состоит в получении длинной и тонкой проволоки из короткого металлического прутка большого сечения. Обычно получают настолько длинную проволоку, что этот процесс по существу можно считать непрерывным. Скорости волочения лежат в пределах от 30 *м/сек* (мягкая проволока малого диаметра) до 0,3 *м/сек* (жесткая проволока большого диаметра).

При волочении проволоки, как и при любой другой обработке металла, большую роль играет смазка. При волочении смазку обычно осуществляют путем пропускания проволоки непосредственно перед прохождением фильеры через «коробку с мылом». В коробке находится сухая порошкообразная смесь различных углеводородов, часто сюда помещают эквивалент обычного хозяйственного мыла. Фирмы и даже отдельные мастера применяют свои собственные смеси. В наши дни смазка проволоки при волочении в значительной мере является искусством.

Износ фильеры при волочении проволоки сопряжен с большими издержками. Это связано не только со стоимостью фильеры, но и потерями продукции вследствие частой смены фильер.

Смазка, осуществляемая с помощью «коробки с мылом», называется граничной смазкой. Она характеризуется наличием «скользкого» вещества (например, мыла) между поверхностями, одна из которых перемещается относительно другой. Скольжение обеспечивается смазкой, молекулы которой имеют цепное строение и ориентируются перпендикулярно этим поверхностям. Поскольку такие молекулы обладают малой устойчивостью к срезывающим усилиям, при их скольжении относительно друг друга обеспечивается малое сопротивление. К сожалению, между поверхностями трудно получить толстый слой смазки, поэтому зазор между ними невелик. В общих чертах этот случай схематически отражен на рис. 4.3,*а*. При граничной смазке контакт поверхностей полностью не исключен, так как зазор между ними будет того же порядка, что и неровности поверхности.

Предложенный недавно способ обеспечивает гидродинамическую смазку проволоки в фильере (рис. 4.3, *б*)[1]. В данном случае поверхности полностью разделены, и смазка осуществляется так же, как в обычных цапфах или опорных подшипниках с масляной смазкой. Студентам, незнакомым с таким способом смазки, следует потратить несколько минут, чтобы заглянуть в учебник и изучить вопрос[2].

---

[1] Christopherson N., Promotion of Fluid Lubrication in Wire Drawing, *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, **169**, 643 (1955).

[2] Radzimovsky E. I., Lubrication of Bearings. Theoretical Principles and Design, New York, Ronald, 1959.

Предложены две идеи подачи в фильеру смазки под высоким давлением. Одна из них связана с применением подкачки. Другая состоит в том, что применяется *питающая труба*, как это показано на рис. 4.4. Внутренняя поверхность питающей трубы обработана с высокой точностью; и если ее применение окажется в дальнейшем целесообразным,

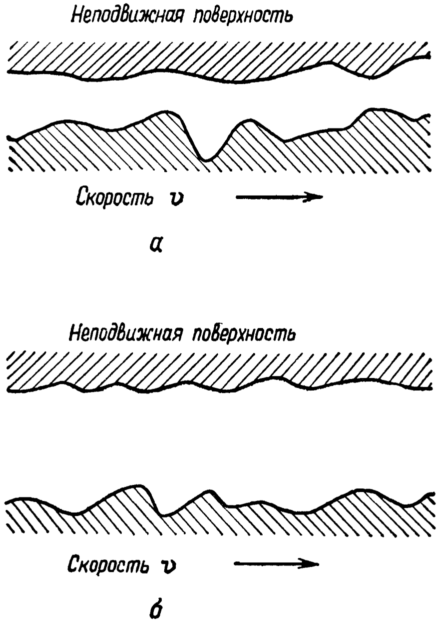


Рис. 4.3. Различие между граничной (*а*) и гидродинамической смазкой (*б*).

то отпадет необходимость в насосе, трубопроводной системе и других сложных устройствах, связанных с реализацией идеи подкачки.

Решение этой задачи было поручено группе инженеров. Один из них должен рассмотреть возможность подкачки жидкой смазки, а другой — исследовать «поведение» проволоки и смазки в фильере. Еще одному инженеру, за работой которого мы здесь подробно проследим, нужно изучить идею применения питающей трубы. Инженеры решили встретиться с руководителем работы не позже чем через неделю, чтобы обсудить полученные результаты и решить, что делать дальше.

Ниже будет рассмотрена работа инженера, занимавшегося исследованием идеи о применении питающей трубы. На последующих страницах справа даются записи из блокнота инженера, слева приводится своего рода последовательность рассуждений, показывающая возможный ход его мысли, разумеется, очень сжато. Однако наша цель состоит в том,

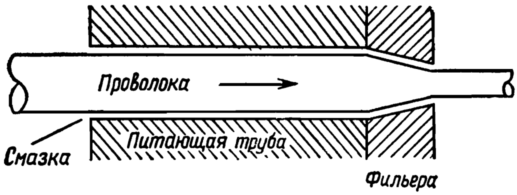


Рис. 4.4. Предлагаемая схема жидкостной смазки при волочении проволоки.

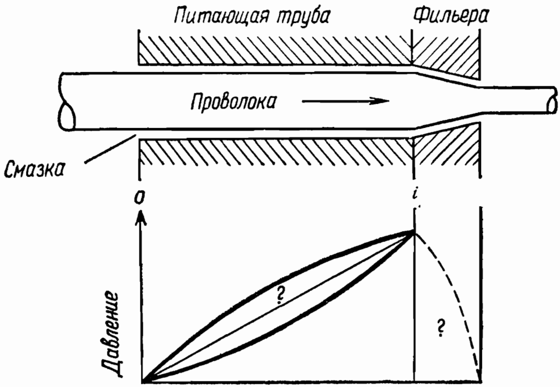
чтобы проиллюстрировать процесс инженерного анализа, и сжатое изложение мыслей позволяет сделать это более эффективно. С рассматриваемым здесь примером можно ознакомиться двумя способами. Эти страницы можно прочитать бегло, опуская детали и не углубляясь в отдельные этапы анализа и формулы. При другом подходе можно продвигаться шаг за шагом, попутно изучая некоторые разделы гидромеханики. Однако в любом случае вы должны быть уверены в том, что поняли, каким образом при решении конкретной задачи применяется инженерный анализ.

В некоторых местах вам будет предложено самостоятельно выполнить операции, связанные с последующим этапом, или дать ответ на вопрос, имеющий отношение к вашей собственной задаче. (Это относится также и к последующим примерам.) Описание этапов и ответы на вопросы даются здесь же, однако вы много выиграете, если попытаетесь самостоятельно ответить на вопросы, прежде чем взглянете на ответ, предложенный автором.

«Итак, посмотрим, в чем здесь дело. Я должен исследовать питающую трубу. Сделаю-ка я чертеж. Что здесь происходит? Смазка поступает в точке О и втягивается в трубу. Давление в трубе, по-видимому, будет возрастать следующим образом. (Вычерчивает график изменения давления.) *Не следует думать, что давление возрастает линейно. Почему давление вообще должно расти? Мне нужно исследовать поток жидкости в кольцевом пространстве между проволокой и трубой и выяснить, при каких условиях (т. е. при каких значениях скорости волочения, вязкости смазочного вещества, толщине слоя смазки и т. д.) давление будет возрастать, если оно вообще возрастает.*

Моя задача — выяснить, под действием каких причин давление возрастает и при каких условиях это происходит. Итак, что происходит, если давление возрастает (я полагаю, что при соответствующих условиях оно будет возрастать)? Мне нужно выяснить, возможно ли осуществить эту идею на практике. Что означает «практически реализуемая идея» в данном случае? Одно только увеличение давления еще не делает эту идею практически реализуемой. До какой величины должно увеличиваться давление? Насколько высоким должно оно стать? В этом нужно разобраться Джону (инженеру, которому в этой задаче поручена фильера). *Он должен сказать, какое давление необходимо на входе фильеры, поскольку это давление обеспечивает всасывающая труба. Да! Он должен также сказать, какой расход смазки (масла) нам необходим. Я не могу пока рассматривать только питающую трубу. На данном этапе нам с Джоном нужно немного поработать вместе.»*

(Обратите внимание на то, что инженер бьется здесь над *определением задачи*. Он должен перейти от неопределенной ситуации к вопросу, на который можно дать количественный ответ, содержащий информацию о возможности реализации этой схемы.)


Питающая труба
Фильера
Проволока
Смазка
o
i
?
?
Давление

Разговор с Джоном, состоявшийся на данном этапе, привел к выводу, что давление смазки на входе фильеры должно быть достаточным, чтобы обеспечить текучесть материала проволоки. Поскольку в этой точке напряжение в проволоке, по-видимому, невелико, давление должно быть примерно равно пределу текучести материала σ_y при сжатии. Для стали σ_y составляет около 42 *кг/мм*², для алюминия — около 14 *кг/мм*², а для меди — 4,2 *кг/мм*². Было решено, что эти цифры рассматриваются как первое приближение. Джон пока еще ничего не может сказать относительно необходимого расхода смазки. Ему нужно проанализировать очень многое, прежде чем удастся определить эту величину.

«*Итак, давление, которое я должен обеспечить, равно* σ_y. *Однако расход смазки я должен рассматривать как некоторый параметр, пока Джон не даст мне некоторые конкретные цифры. Можно также оставить все в общем виде и до получения числовых значений использовать* σ_y. *Теперь посмотрим, на чем я остановился. Ах, да! Что означает в данной задаче «практически реализуемая идея»?*

Прежде всего это означает, что труба не должна быть слишком длинной. Если труба будет слишком длинной, то вся идея в целом окажется неприемлемой. Единственное, что мне нужно определить,— это длину трубы, при которой на входе фильеры будет давление, равное σ_y.»

(Прежде чем продолжать чтение, попытайтесь самостоятельно получить конкретное условие задачи.)

Давление, которое необходимо иметь на входе фильеры, $i \approx \sigma_y$:

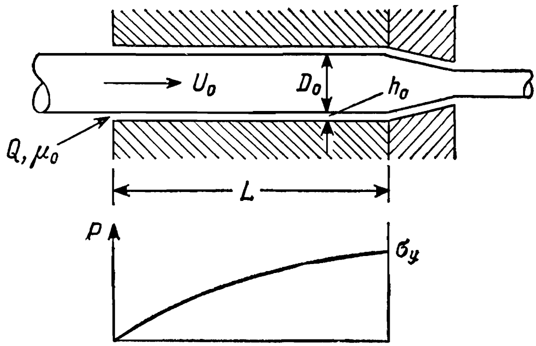
Для стали $\sigma_y = 42$ *кг/мм*^{2}.
Для алюминия $\sigma_y = 14$ *кг/мм*^{2}.
Для меди $\sigma_y = 4{,}2$ *кг/мм*^{2}.
Расход смазки в питающей трубе неизвестен. Джон пытается его найти.

«Эта формулировка задачи пока еще недостаточно конкретна. Мне нужно учесть больше величин, оказывающих влияние на длину трубы: вязкость смазки, скорость волочения, величину зазора между проволокой и трубой и, возможно, некоторые другие параметры.

Возможно, вместо того чтобы решать конкретную задачу, мне следует рассмотреть общий случай. (См. новый рисунок.)

Я должен получить соотношение, связывающее все эти величины. Конкретно мне нужно найти соотношение между μ_0, Q, U_0, h_0, D_0, L *и* σ_y. *Если я затем подставлю в него значения* U_0, D_0, h_0, μ_0, σ_y, *а Джон даст мне* Q, *я смогу вычислить* L.»

(Обратите внимание на то, что теперь инженер определил свою задачу количественно, т. е. выявил величины, определяющие искомый результат.)



Задача: Найти соотношение между μ_0, Q, D_0, h_0, L, U_0 и σ_y.

План: Проанализируйте поток жидкости, применяя уравнение количества движения и уравнение неразрывности.

«Найдем соотношение, связывающее μ_0, Q, D, U_0, h_0, L *и* σ_y. *Это моя задача. С чего начать? Это задача о потоке жидкости. Лучше всего сначала проанализировать поток жидкой смазки в питающей трубе, используя уравнение количества движения и уравнение неразрывности. Я выполню этот анализ и посмотрю, что получится.*

Для анализа этого потока нужно построить новый чертеж. Я должен принять некоторые дополнительные допущения. Лучше всего построить простую модель задачи и перечислить все сделанные допущения и введенные приближения.

(После определения задачи инженер приступает к построению модели.)

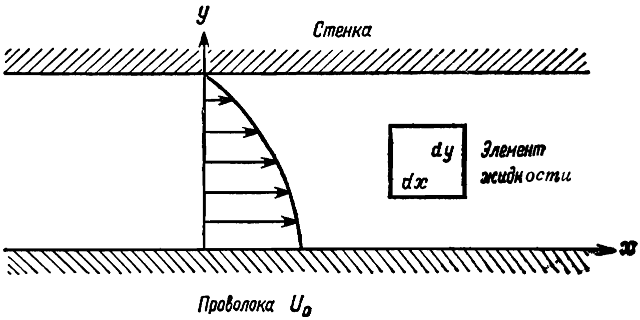
(Какие допущения приняли бы вы? Перечислите их, прежде чем продолжать чтение.)

Строя чертеж, я молчаливо предполагал, что проволока проходит по оси трубы.

(Обратите внимание на то, как легко принять допущение, даже не заметив, что вы его приняли. Остерегайтесь этого.)

Почему проволока должна располагаться по оси трубы? Фильера выглядит как строго центрированное устройство. Я предположил, что проволока будет проходить по оси трубы, однако лучше бы обсудить этот вопрос с Джоном. А что если проволока проходит не по оси? Станет ли в этом случае давление расти быстрее или медленнее? Я не знаю! Для начала предположение, что проволока будет проходить строго по оси трубы, подойдет, однако позже мне нужно будет вернуться к этому вопросу.

Вязкость растет при увеличении давления и уменьшается при возрастании температуры. При движении жидкости, по-видимому, в результате действия сил вязкого трения будет происходить ее нагрев. При столь больших давлениях и высоких скоростях влияние как давления, так и температуры может оказаться весьма существенным. Однако влияния этих факторов будут противоположны. Пока я оставлю в силе допущение о постоянстве вязкости, но затем должен буду вернуться и к этому вопросу.



Допущения:

1. Проволока проходит по оси трубы. (Спросить об этом у Джона.)
2. Вязкость постоянна — пренебрегаем влиянием давления и температуры.
3. Поток ламинарный ($\mathrm{Re}=\rho VD/\mu=Vh_0/v=10^2$).
4. Кривизной поверхностей можно пренебречь ($h_0/D_0 \ll 1$).
5. Упругие деформации проволоки и трубы пренебрежимо малы.

*Здесь, по-видимому, приемлемо допущение о ламинарном потоке. Посмотрим-ка. Кажется, я уже сейчас смогу оценить число Рейнольдса (*Re*). Нет, не смогу! Какое значение h_0 приемлемо? Для жидкой смазки μ_0 составляет около 10^{-2} кг·сек/м². Скорость волочения проволоки может составлять от* 0,03 *до* 30 *м/сек, мы примем* 3 *м/сек. Отсюда получаем* $Re \approx 3{,}3 \cdot 10^4 h_0$. *Если значение h_0 составляет даже* 0,03 *м, впрочем, нет, скорее оно будет равно* 0,003 *м, то* $Re \approx 10^2$. *Ламинарный поток подходит.*

(Заметим, что для потока между плоскими пластинами длина в числах Рейнольдса должна рассматриваться как расстояние между пластинами. Обратите также внимание на то, что инженер очень быстро оценил порядок величины, чтобы убедиться в справедливости своего предположения.)

Если значение h_0 мало по сравнению с D_0, то кривизной можно пренебречь. Это условие, несомненно, будет выполняться.

Если будет происходить упругая деформация трубы или проволоки, что определенно имеет место при увеличении давления вдоль трубы, то значение h_0 будет возрастать. Это приведет к необходимости увеличения длины трубы, требуемой для получения заданного давления. Однако будет ли это увеличение существенным? Этот эффект, по-видимому, не столь существен, как возможное влияние давления и температуры на вязкость смазки. Впрочем, к этому вопросу я вернусь позже. Это допущение можно, по-видимому, оставить в качестве первого приближения.

Так ли это? Думаю, что да.»

«Теперь продолжим решение задачи. Применим уравнение количества движения и уравнение неразрывности к потоку жидкости и попытаемся получить соотношение, связывающее Q, h_0, μ_0, D_0, L, σ_y *и* U_0.

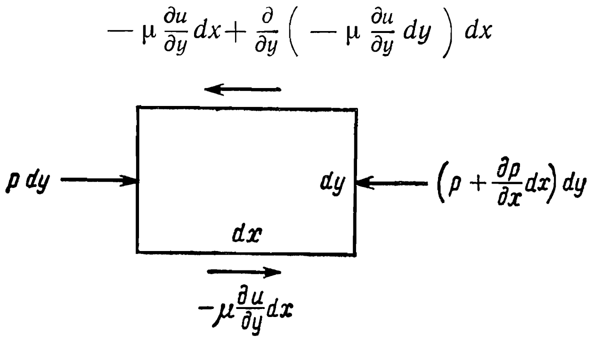
Изобразим в крупном плане элемент жидкости и действующие на него силы.

Теперь пренебрежем составляющей скорости по оси y. Это согласуется с допущением о ламинарном потоке. Допустим также, что поток является полностью установившимся. Инерция отсутствует. А что происходит на входе трубы? Сейчас этой областью следует пренебречь, а затем тщательно исследовать ее.

(Теперь, когда модель построена, инженер приступает к применению физических принципов.)

Проверим размерности обеих частей уравнения. Все в порядке.»

Применение уравнения количества движения к элементу жидкости:



$$p\,dy-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy-\mu\frac{\partial u}{\partial y}dx-$$
$$-\left[-\mu\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\mu\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)dx\right]=0,$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

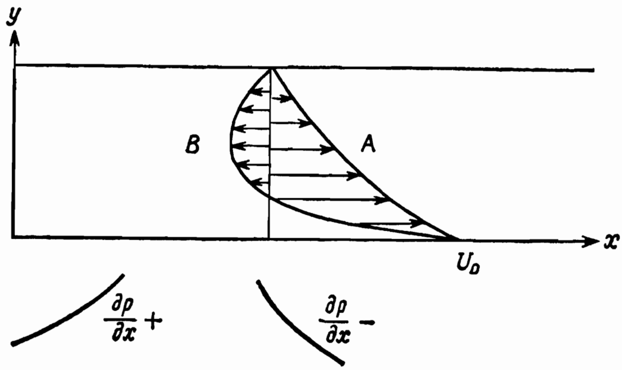
$$\frac{\text{кг}/\text{м}^2}{\text{м}}=\frac{\text{кг}\cdot\text{сек}}{\text{м}^2}\,\frac{\text{м}/\text{сек}}{\text{м}^2},$$

$$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}=\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

«Имеет ли смысл это уравнение? Оно показывает, что градиент давления пропорционален второй производной скорости. Если $\partial p/\partial x=0$, то $du/dy=$const, т. е. скорость будет изменяться по линейному закону, как между двумя пластинами. Так и должно быть. Кроме того, коэффициентом пропорциональности является коэффициент вязкости. Чем больше μ, тем больше $\partial p/\partial x$. Хорошо, а какой знак? Положительная производная $\partial p/\partial x$ означает, что вторая производная $\partial^2 u/\partial y^2$ положительна. При этом получим такой профиль скорости. (См. кривую *A* на рисунке.) *Кажется, все правильно. Допустим, что она может быть даже отрицательной.* (См. кривую *B* на рисунке.)

Это выражение нельзя интегрировать, если $\partial p/\partial x$ зависит от y. Разумеется, при такой тонкой пленке это может иметь место. Кроме того, p является только функцией x.

Найдем производную для проверки интеграла. Все в порядке. Снова интегрируем: производная правильна. Находим граничные условия.»



Дополнительное допущение:

6. p и $\frac{\partial p}{\partial x}$ являются функциями только x.

$$\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx},$$

$$\mu_0 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dp}{dx} y + f_1(x),$$

$$\mu_0 u = \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + y f_1(x) + f_2(x).$$

Граничные условия:

1) При $y=0$ $u=U_0$

2) При $y=h_0$ $u=0$

«Используя первое граничное условие, получаем

Второе граничное условие дает

Полное уравнение имеет вид

Разрешая его относительно и, получаем

(Что инженер должен делать дальше?)»

Граничные условия:

1) $\mu_0 U_0 = f_2(x)$,

2) $$0 = \frac{dp}{dx}\frac{h_0^2}{2} + h_0 f_1(x) + \mu_0 U_0,$$

$$f_1(x) = -\frac{dp}{dx}\frac{h_0}{2} - \frac{\mu_0 U_0}{h_0}.$$

$$\mu_0 u = \frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} - \frac{dp}{dx}\frac{h_0 y}{2} - \frac{\mu_0 U_0 y}{h_0} + \mu_0 U_0.$$

$$u = \frac{1}{2\mu_0}\frac{dp}{dx}(y^2 - h_0 y) + U_0\left(1 - \frac{y}{h_0}\right).$$

«Теперь проверим полученный результат. Прежде всего размерность.

(Обратите внимание на то, что инженер непрерывно проверяет размерность, граничные условия, физический смысл и т. д.)

Теперь проверим пределы.

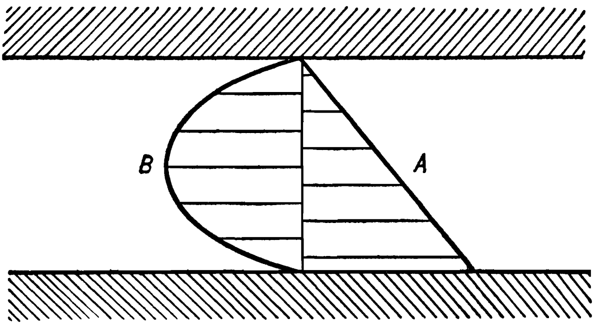
Все в порядке. Произведем проверку, исходя из физического смысла. Второй член $U_0(1-y/h_0)$ *характеризует линейную зависимость.* (См. линию A на рисунке.) *Первый член* (y^2-h_0y) *— парабола, симметричная функция, все значения которой отрицательны.* (См. линию B на рисунке.) *Член, характеризующий линейную зависимость, получаем в случае движущихся пластин при отсутствии градиента давления, а параболу — при наличии градиента давления, но при отсутствии движения. Кажется, все в порядке. Сумма этих членов и дает общий результат.*

Итак, я получил профиль скорости. Теперь нужно найти расход.

Я предположил, что $h_0 \ll D_0$. *Нужно придерживаться этого допущения».*

$$\frac{м}{сек}=\frac{1}{кг\cdot сек/м^2}\,\frac{кг/м^2}{м}\cdot м^2=\frac{м}{сек}\,.$$

При $y=0$ из уравнения получаем $u=U_0$
При $y=h$ из уравнения получаем $u=0$



$$u=\frac{1}{2\mu_0}\,\frac{dp}{dx}(y^2-h_0y)+U_0\left(1-\frac{y}{h_0}\right).$$

Выражение для расхода при жидкой смазке имеет вид

$$Q=\int_{D_0/2}^{D_0/(2+h_0)}\pi Du\ dy.$$

«Вот результат.

Проверим полученное выражение. Прежде всего — размерность.

Посмотрим теперь, имеет ли оно смысл. Член $\pi D_0 U_0 h_0/2$ *— расход при отсутствии градиента давления. Второй член — расход, обусловленный градиентом давления. Он становится больше при увеличении* dp/dx*, что, по-видимому, правильно. Вклад величин* D_0*,* h_0 *и* μ_0 *также, по-видимому, отражен верно. Безусловно, это уравнение чувствительно к изменению* h_0*!»*

(Кажется ли вам, что уравнение для Q составлено правильно? Какие еще проверки можно сделать?)

$$
\begin{aligned}
Q &= \pi D_0 \int_0^{h_0} u\, dy = \\
&= \pi D_0 \int_0^{h_0} \left[\frac{1}{2\mu_0} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) + U_0 \left(1 + \frac{y}{h_0} \right) \right] dy = \\
&= \pi D_0 \left[\frac{1}{2\mu_0} \frac{dp}{dx} \left(\frac{h_0^3}{3} - \frac{h_0^2}{2} \right) + U_0 \left(h_0 - \frac{h_0^2}{2} \right) \right] = \\
&= \frac{\pi D_0 U_0 h_0}{2} + \frac{\pi D_0 h_0^3}{12\mu_0} \frac{dp}{dx}.
\end{aligned}
$$

$$
\frac{м^3}{сек} = \frac{м \cdot м \cdot м}{сек} = \frac{м \cdot м^3 \cdot кг}{м^3} \cdot \frac{м^2}{кг \cdot сек}
$$

$$
\frac{м^3}{сек} = \frac{м^3}{сек} = \frac{м^3}{сек}.
$$

Примечание: Величина Q очень чувствительна к изменению величины h_0. Необходимо получить больше информации о реальных значениях h_0.

«Теперь проверим знаки. Если производная dp/dx положительна, то давление будет направлять поток обратно. Поэтому неправильно, что здесь записан плюс. По-видимому, здесь должен быть минус. Лучше вернуться назад и проверить.

Так и есть! Допущена ошибка. Нужно $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$. *Теперь все в порядке.*

Это уравнение определяет граничное условие $Q=0$, которое может представить для нас интерес впоследствии.

Проверяем размерность. Все в порядке.

Сейчас я не стану влезать во все детали, пока в этом не возникнет необходимости, иначе завязнешь. Что я сейчас пытаюсь сделать? Найти соотношение между всеми величинами. Мы получили Q как функцию D_0, U_0, h_0, μ_0 и dp/dx. Нужно найти L и y, поэтому мы интегрируем. И это совсем нетрудно».

Исправление ошибки:

$$Q = \frac{\pi D_0 U_0 h_0}{2} - \frac{\pi D_0 h_0^3}{12\mu_0} \frac{dp}{dx}.$$

Если $Q=0$, то $\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu_0 U_0}{h^2{}_0}$.

Если значение Q положительно, то $\frac{dp}{dx} < \frac{6\mu_0 U_0}{h^2{}_0}$,

$$\frac{кг}{м^3} = \frac{кг \cdot сек}{м^2} \cdot \frac{м}{сек} \cdot \frac{1}{м^2} = \frac{кг}{м^3}.$$

«Это похоже на искомое соотношение! Выполним некоторые проверки. Размерность в порядке. Если σ_y увеличивается, то L возрастает. Значит, все правильно. Если μ_0 возрастает, то L убывает. Все в порядке. Если U_0 возрастает, то L убывает. Относительно h_0 ничего нельзя сказать, но, по-видимому, здесь все в порядке».

$$\frac{dp}{dx}=\frac{6\mu_0U_0}{h_0^2}-\frac{12\mu_0Q}{\pi D_0h_0^3}$$

$$p=\left(\frac{6\mu_0U_0}{h_0^2}-\frac{12\mu_0Q}{\pi D_0h_0^3}\right)x+C_1$$

При $x=0$ $p=0$, следовательно, $C_1=0$.

При $x=L$ $p=\sigma_y$.

$$\boxed{\sigma_y=\left(\frac{6\mu_0U_0}{h_0^2}-\frac{12\mu_0Q}{\pi D_0h_0^3}\right)L}$$ Окончательный результат

$$\frac{кг}{м^2}=\frac{кг\cdot сек}{м^2\cdot м^2}\cdot\frac{м\cdot м}{сек}=\frac{кг\cdot сек}{м^2}\cdot\frac{м^3}{сек}\cdot\frac{м}{м^4}$$

$$\frac{кг}{м^2}=\qquad\frac{кг}{м^2}\qquad=\qquad\frac{кг}{м^2}$$

«Что еще можно сказать об этом уравнении? Каковы другие пределы? Посмотрим. Производная dp/dx должна быть положительной.

Конечно!

Если теперь Джон скажет, какое значение Q ему нужно, я смогу найти длину трубы при известных μ_0, U_0, D_0 и h_0. Все эти параметры, кроме h_0, легко задать. Что определяет величину h_0? Необходимо, чтобы значение h_0 было мало. Чем оно меньше, тем лучше. Однако если h_0 становится слишком малым, то возникают различного рода проблемы, связанные с центровкой, и, кроме того, проволока будет получаться волнистой. Я полагаю, что, вероятно, допустимо отношение h_0/D_0, равное 0,05, 0,10 или 0,15, однако, не проведя эксперимента, нельзя назвать точную цифру. Весь процесс довольно чувствителен к изменению h_0. В конечном счете нам нужно будет провести этот эксперимент, однако с помощью полученного уравнения нельзя определить интервал значений, поэтому пока не стоит тратить на это время и деньги».

$$\frac{dp}{dx}=\frac{6\mu_0 U_0}{h_0^2}-\frac{12\mu_0 Q}{\pi D_0 h_0^3}>0$$

$$\frac{6\mu_0 U_0}{h_0^2}>\frac{12\mu_0 Q}{\pi D_0 h_0^3}$$

$$\boxed{Q<\frac{\pi D_0 U_0 h_0}{2}}$$

Ограничение на Q для положительного градиента давления

Прервем на этом рассказ о работе инженера. Ему остается проделать еще очень большую работу. В частности, он не рассматривал возможность оптимизации размеров питающей трубы и не занимался оценкой и обобщением полученных результатов. Прежде чем приступать к выполнению этой работы, ему нужно получить некоторые цифры от своих коллег. В нашем описании мы опустим некоторые этапы работы инженера и его коллег и снова возвратимся к рассуждениям и записям в блокноте, сделанным после того, как были получены следующие результаты:

1. По-видимому, будет достаточен расход жидкой смазки в фильере порядка $2{,}8 \cdot 10^{-6}$ *м³/сек*.

2. По-видимому, подходит смазка с вязкостью, равной 10^{-2} *кг·сек/м²*.

3. По-видимому, целесообразно считать значение h_0 примерно равным $^1/_{10}\, D_0$.

4. Следующие значения скорости, предела текучести и диаметра проволоки можно считать типичными:

Случай	Материал для изготовления проволоки	Предел текучести, *кг/мм²*	Диаметр проволоки, *мм*	Скорость волочения, *м/сек*
1	Сталь	42	0,8	30
2	Алюминий . .	14	1,6	30
3	» . .	14	3,1	3
4	Медь	4,2	3,1	30
5	»	4,2	6,2	3

В действительности инженер исследовал большее число возможных случаев, чем здесь показано. Этот перечень сокращен здесь для большей ясности и в целях экономии места. Нетрудно представить себе, сколько было обсуждений, размышлений, телефонных разговоров, сколько было изучено литературы, прежде чем были получены эти цифры.

Теперь инженер уже имеет некоторые цифры, необходимые ему для подстановки в полученное им уравнение

$$L = \frac{\sigma_y}{6\mu_0 U_0/h_0^2 - 12Q\mu_0/\pi D_0 h_0^3}\,.$$

После выполнения вычислений он получил следующие результаты:

Случай	L, *м*
1	2,4
2	0,26
3	19,0
4	0,25
5	11,0

Ранее в ходе анализа он перешел от конкретной реальной ситуации к модели, т. е. к некоторому приближению. Теперь с помощью этой модели он получил ряд конкретных цифр. Далее возникает следующий вопрос: в каком соотношении с исходной реальной ситуацией находятся эти цифры? Ответ на этот вопрос дается на этапе, который мы называем оценкой. С этим вопросом связан и другой: в каком соотношении с общей реальной ситуацией такого или аналогичного характера находятся эти цифры? Данный этап мы называем обобщением. Это важный этап, на котором мы многое узнаем. Прежде чем двигаться дальше, попытайтесь самостоятельно оценить полученные инженером цифры.

«Ого! В третьем случае 19 м. Ни в какие ворота! Посмотрим-ка эти случаи по порядку.

В случае 1, безусловно, труба получается очень длинной. Более 2м — это слишком много. Посмотрим, что нам могло бы помочь. (Изучает полученные им цифры.) *Увеличить вязкость — ее можно изменять в известных пределах. Увеличить скорость — здесь нельзя ожидать слишком многого, хотя уменьшение трения может привести к повышению скорости. Снизить расход смазки — впрочем, нет, его нужно увеличивать. При этом должно удовлетворяться только что записанное ограничение, однако этого можно добиться. Джон, безусловно, не возражал бы против увеличения расхода. При достаточно большом расходе смазки я смогу уменьшить длину трубы до сколь угодно малого размера. Вот ключ к решению этого вопроса. Впрочем, еще одним ключом является* h_0. *В полученное окончательное выражение* h_0 *входит в квадрате и в кубе. Небольшие изменения* h_0 *оказывают существенное влияние на результат. Если бы удалось хоть немного уменьшить* h_0, *то труба стала бы значительно короче. Несмотря на то что 2,4 м — для трубы очень много, я думаю, что это условие все же можно реализовать. Если* D_0 *(а следовательно, и* h_0*) уменьшить, то труба стала бы короче.*

В случаях 2 и 4 все обстоит хорошо. Длина трубы около четверти метра. Очень хорошо.

Случаи 3 и 5 выглядят совсем иначе. Плохие результаты.

Посмотрим, в чем дело. В обоих этих случаях скорость волочения мала — 3 *м/сек, а труба довольно длинная.*

Теперь посмотрим, что все это означает. Думается, вот что: данная идея осуществима только при определенных условиях, и мы должны продолжить ее изучение, во всяком случае изучение ее инженерных аспектов. Это означает также и то, что, по-видимому, решение возможно только тогда, когда длина трубы мала, а скорости высоки; в этих случаях проволока может быть изготовлена из любого материала. Кроме того, все зависит от возможности поддержания малого — очень малого — значения h_0. *Во многом может помочь применение смазки с большой вязкостью».*

Сводка результатов вычислений

	σ_y, $кг/м^2$	μ_0, $\frac{кг \cdot сек}{м^2}$	U_0, $\frac{м}{сек}$	D_0, $м$	h_0, $м$	h_0^2, $м^2$	h_0^3, $м^3$	Q, $м^3/сек$	$A=\frac{6\mu_0 U_0}{h_0^2}$, $\frac{кг}{м^3}$	$B=\frac{12\mu_0 Q}{\pi D_0 h_0^3}$, $\frac{кг}{м^3}$	$L=\frac{\sigma_y}{A-B}$, $м$
1	$42 \cdot 10^6$	10^{-2}	30,0	$0,78 \cdot 10^{-3}$	$0,78 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-8}$	$5,1 \cdot 10^{-13}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$29 \cdot 10^7$	$27,3 \cdot 10^7$	2,4
2	$14 \cdot 10^6$	10^{-2}	30,0	$1,56 \cdot 10^{-3}$	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^{-12}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$7,2 \cdot 10^7$	$1,8 \cdot 10^7$	0,26
3	$14 \cdot 10^6$	10^{-2}	3,0	$0,31 \cdot 10^{-2}$	$0,31 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$3,1 \cdot 10^{-11}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$182 \cdot 10^4$	$108 \cdot 10^4$	19,0
4	$42 \cdot 10^5$	10^{-2}	30,0	$0,31 \cdot 10^{-2}$	$0,31 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$3,1 \cdot 10^{-11}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$182 \cdot 10^5$	$108 \cdot 10^4$	0,25
5	$42 \cdot 10^5$	10^{-2}	3,0	$0,62 \cdot 10^{-2}$	$0,62 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$2,5 \cdot 10^{-10}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$45 \cdot 10^4$	$6,7 \cdot 10^4$	11,0

Снова прервем рассуждения инженера. Обратите внимание на то, как происходят обобщение и оценка. Инженер начал свою работу с построения модели реальной ситуации. Его модель достаточно проста, чтобы с ней можно было оперировать, и в то же время она достаточно сложна, чтобы полученные на ней результаты имели смысл. Строго говоря, полученные цифры относятся только к модели. Теперь на этапе оценки и обобщения инженер снова возвращается к реальной ситуации. Схематически это было показано на рис. 4.2. Переход от реальной ситуации к модели или обратно должен в значительной мере основываться на здравом смысле. Слишком сложная модель не позволит получить в разумные сроки полезные результаты. Слишком простая модель даст ошибочные результаты, которые могут привести к принятию ошибочных решений. Разумеется, в некоторых задачах невозможно получить простые модели, которые дают имеющие смысл результаты. Инженер должен уметь распознавать эти случаи, поскольку они требуют более длительного исследования и разработки.

Нужно обратить внимание на следующий момент. В большинстве случаев работа начинается с построения модели и заканчивается вычислением. В этой книге рассматриваются также такие этапы, как построение модели, а также оценка и обобщение, поскольку они являются составной частью работы большинства инженеров.

На этом, однако, решение задачи о смазке проволоки при волочении не заканчивается. Прежде чем мы оставим ее, необходимо решить еще один вопрос. На рис. 4.2 показан следующий этап: выдача результатов и рекомендаций. В самом начале решения этой задачи руководитель работы сказал, что состоится встреча для обсуждения результатов предварительного изучения и составления плана дальнейшей работы. Теперь эта встреча приближается. В каком виде должен инженер представить полученную им информацию?

Поскольку инженер не связан специальной формой отчета, он может выбрать метод представления этой информации по своему усмотрению. Он может подготовить устное сообщение о полученных результатах. Он может дополнить свой устный доклад письменными документами — графиками, таблицами и т. д. Если необходимо, то для дополнения устного сообщения инженер может составить письменный отчет. Такой письменный отчет может быть любого объема. Инженер может даже подготовить диапозитивы или другие наглядные пособия.

На данном этапе инженер тщательно изучает все обстоятельства и цели встречи. Ее результаты окажут решающее влияние на принятие решения. Примет ли фирма новую идею? Если примет, то в каком виде? Как его коллег-инженеров, так и руководителей интересует, что именно он получил и как точны полученные им результаты. Однако инженер ограничен временем. Поэтому он решает дать краткое письменное обобщение полученных результатов, которое можно раздать всем присутствующим на совещании и которое он очень кратко дополнит устным сообщением. Инженер чувствует, что он может эффективно изложить свои результаты и рекомендации менее чем за 10 *мин*. (Всю эту работу свести к 10 *мин*? Правильно!) Прежде чем читать его отчет, вы, возможно, пожелаете сами подготовить для сравнения собственное сообщение.

Задание. Исследовать возможность применения вязкой смазки при волочении проволоки, используя идею питающей трубы.

Задача. Может ли питающая труба приемлемой длины обеспечить необходимые расход и давление смазки?

Подзадача. Определить соотношение между длиной питающей трубы L, вязкостью смазки μ_0, скоростью волочения U_0, пределом текучести σ_y, толщиной слоя смазки h_0, интенсивностью потока Q и диаметром проволоки D_0.

Допущения, принятые в модели	Примечания
1. Требуемое давление равно пределу текучести.	1. Противоположно направленное напряжение снижает требуемое давление и уменьшает необходимую длину питающей трубы.
2. Давление не влияет на вязкость.	2. С увеличением вязкости давление возрастает; необходимая длина трубы уменьшается.
3. Нагрев не влияет на вязкость.	3. При нагреве, обусловленном силами вязкого трения, температура увеличивается и вязкость уменьшается; необходимая длина трубы увеличивается.
4. $h_0=\frac{1}{10}D_0$, h_0 — постоянная.	4. Результаты очень чувствительны к изменению h_0.
5. $Q=2{,}8\cdot10^{-6}$ *м³/сек*; $\mu_0=10^{-2}$.	5. Может оказаться желательным иметь бóльшие значения Q.

Результаты, полученные на модели:

$$L=\frac{\sigma_y}{6\mu_0U_0/h_0^2-12\mu_0Q/\pi D_0h_0^3},$$

$$Q=\frac{\pi D_0U_0h_0}{2}.$$

Случай	Материал	D_0, *мм*	U_0, *м/сек*	*L*, *м*
1	Сталь	0,8	30	2,4
2	Алюминий	1,6	30	0,26
3	Алюминий	3,1	3	19,0
4	Медь	3,1	30	0,25
5	Медь	6,2	3	11,0

Выводы: В случае трубы малой длины и высокой скорости волочения идею можно реализовать при любом материале проволоки. В случае длинной трубы и низких скоростей волочения идею реализовать нельзя.

Рекомендации:

1. Следует предпринять экспериментальные исследования для получения более достоверных данных о реальных значениях h_0 как функции D_0, U_0 и других возможных факторов.

2. Следует продолжить аналитические исследования с целью ослабить принятое допущение о постоянной величине коэффициента вязкости.

3. После выполнения пунктов 1 и 2 следует пересмотреть всю программу разработки в свете полученных результатов.

Будут ли приняты рекомендации инженера, зависит от множества факторов, на которые он не может оказать влияния (например, финансовая сторона, другие неотложные технические проблемы, которые необходимо решить, результаты, полученные его коллегами, и т. д.). Однако, если его рекомендации будут приняты, ему еще придется поработать над этой задачей.

4.4. Краткие выводы

В этой главе был дан краткий обзор процесса инженерного анализа, который сопровождался конкретным примером. Основными этапами инженерного анализа являются:

1. Определение задачи в такой форме, для которой возможно получение решения.

2. Построение модели, которая достаточно проста, чтобы получить решение, и в то же время достаточно сложна, чтобы получаемые результаты имели смысл.

3. Везде, где это возможно, желательно использовать в анализе основные физические принципы, а не специальные формулы.

4. Проверка работы. Для этого можно воспользоваться предельными значениями величин, проверкой размерности, проверкой исходя из физического смысла и т. д.

5. Оценка полученных результатов и их изучение или обобщение. В каком соотношении с реальной задачей находятся результаты, полученные с помощью модели?

6. Выдача полученных результатов наиболее подходящим и эффективным способом. Изложение существа вопроса, а не деталей.

В нескольких последующих главах дается более подробное обсуждение каждого из перечисленных этапов в отдельности. Приводятся примеры. В гл. 5 рассматривается определение задачи.

ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ

1. Johnson W. C., Mathematical and Physical Principles of Engineering Analysis, McGraw-Hill, New York, 1944.
Еще одна хорошая книга о решении инженерных задач. В ней сделан упор на математику в большей степени, чем в рекомендуемой здесь книге Вер Планка и Тира [3]. Еще один неплохой источник задач.
2. Ryder F. L., Creative Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, N. J., 1961.
Даны решения многих задач инженерного анализа.
3. Ver Planck D. W., Teare B. R., Engineering Analysis, John Wiley, New York, 1954.
В некотором смысле эта книга предвосхитила появление данной книги. В ней вводится понятие «профессионального метода» решения задач. Книга хорошо написана. В ней рассматриваются многие вопросы, обсуждаемые в части II данной книги. В конце книги приводится длинный перечень превосходных инженерных задач.

ГЛАВА 5

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

5.1. Введение

Предыдущая глава явилась введением в инженерный анализ, где он был проиллюстрирован на примере процесса решения конкретной задачи. В данной и трех последующих главах подробно освещаются отдельные этапы инженерного анализа, начиная с определения задачи и построения моделей. Эти два этапа удобно объединить под общим названием *формулировка задачи*. Поскольку на изучение основных положений инженерных дисциплин отводится ограниченное время, большинство задач предлагается студентам технических факультетов уже в сформулированном виде, когда модели составлены и допущения заданы или совершенно очевидны.

Когда задача сформулирована преподавателем или автором учебника, студенты имеют возможность уделить больше времени изучению и применению физических принципов. Однако пренебрежение этапом формулировки задачи имеет и неблагоприятные последствия. Задачи, встречающиеся в реальной жизни, редко бывают хорошо определены, а соответствующие модели никто никогда не строит заранее. Затруднения, возникающие на этих начальных этапах, часто служат основной причиной неумения решать инженерные задачи. Цель этой главы состоит в том, чтобы познакомить читателя с этапом формулировки задачи как на основе рассмотрения общих положений, так и на примерах. Здесь детально рассматриваются три задачи, подобранные таким образом, чтобы читатель смог испробовать свои силы на различных этапах решения.

5.2. Определение задачи

Назначение этапа определения задачи состоит в том, чтобы перейти от неопределенных общих положений к конкретным вопросам, на которые можно получить ответ. Никакими ухищрениями с помощью одной математики нельзя получить ответ на такие вопросы, как: будет ли система работать? осуществим ли данный проект? будут ли параметры систем отклоняться от заданных условий слишком сильно? будет ли протекать процесс при низких температурах и т. д.? Столкнувшись с такими вопросами качественного характера, инженер обязан прежде всего перейти от них к конкретным вопросам, ответ на которые можно получить путем инженерного анализа. Он должен определить, какие именно из многих параметров определяют и ограничивают функционирование системы или возможность осуществления проекта. Инженер должен уметь разобраться в физическом явлении настолько глубоко, чтобы уяснить его существенные черты. Он должен перейти от общих вопросов к вопросам такого рода: пусть задана входная мощность 50 *квт*; какова будет рабочая температура коллектора? какие размеры необходимо задать, чтобы плечо рычага при движении не встретило препятствий? каково соотношение между переменными p, v и T? и т. д.

При определении задачи большую роль играют опыт и здравый смысл, но успеху будет способствовать даже простое понимание того факта, что нужен вопрос, поддающийся анализу. Полезно также учитывать, что задаваемый конкретный вопрос должен иметь смысл и что ответ на него должен содержать информацию, связанную с формулируемой задачей. Кроме того, нужно помнить, что для получения результата можно использовать только имеющиеся ресурсы.

5.3. Построение модели

Следующим этапом после того, как задача определена или вопрос сформулирован, является построение модели. Мы приводим рис. 5.1, заимствованный из гл. 4, где впервые было введено понятие модели, с целью иллюстрации того факта, что инженерные модели *не* являются точными копиями реальных физических явлений. Люди, не имеющие инженерного образования, большей частью полагают, что техника является точной и четко определенной областью деятельности. По сравнению с деятельностью, скажем, психолога это совершенно верно. Однако в абсолютном смысле дело обстоит совсем не так. Реальные физические явления, с которыми имеют дело инженеры, очень сложны, и их никогда нельзя проанализировать точно и в полном объеме. Никто и не пытается делать этого. Всегда делают допущения и обобщения, а также пользуются аппроксимацией.

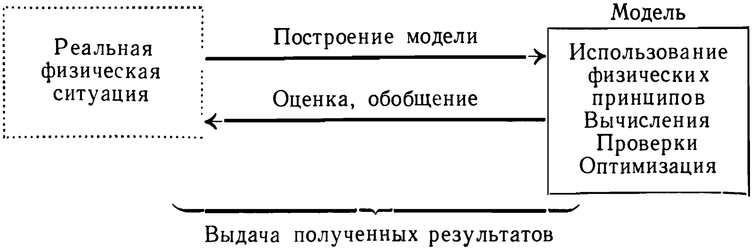


Рис. 5.1. Схема процесса инженерного анализа.

Построение воображаемой модели реального физического явления — обычная процедура в инженерной практике. Важно только, чтобы инженер знал о различии между своей моделью и реальным миром. Эти различия определяются допущениями независимо от того, приняты они сознательно или нет.

Построение модели всегда связано с компромиссом. Чтобы с помощью модели можно было получить *имеющие смысл результаты*, она должна быть достаточно детальной и сложной. В то же время она должна быть достаточно *простой*, чтобы можно было получить решение при ограничениях, налагаемых на результат такими факторами, как сроки, денежные средства, оборудование, квалификация исполнителей и т. д. Большим достижением технических дисциплин является то, что они указывают, как строить такие модели.

Модели, для которых при приемлемых ограничениях можно получить имеющие смысл результаты, можно построить не всегда. Аналогичная проблема встает в настоящее время перед учеными, работающими в области общественных наук. Если получаемая социологическая модель человека достаточно проста для практического использования, то получают результаты, не совпадающие с данными наблюдений. Если же делается попытка построить более сложную модель, то оказывается невозможным учесть все переменные.

В таких случаях для получения результата применяют экспериментальные или эмпирические методы. Другими словами, для накопления большого количества данных выполняются исследования. В разработках и проектировании эмпирические данные используются до тех пор, пока не будет разработана некоторая теория (обобщенная модель), охватывающая данный процесс или рассматриваемую задачу. Следовательно, модели могут быть как экспериментальными, так и аналитическими.

В данной книге просто потому, что это всего лишь книга, рассматриваются главным образом аналитические модели. Это естественная необходимость, однако плохо то, что из-за этого в учебных программах для многих технических дисциплин очень часто пренебрегают экспериментальными методами, хотя на практике их используют довольно часто. Основная работа по планированию простых экспериментов, которые в то же время дают имеющие смысл результаты, должна быть совмещена с учебными лабораторными работами.

5.4. Некоторые замечания о принятии допущений

Не существует какого-либо набора правил, позволяющего быстро принимать допущения при решении инженерных задач. Инженеры стараются построить (мысленно) некоторую модель реального физического явления, которая может дать имеющие смысл результаты и в то же время достаточно проста. Какие именно допущения следует принимать для этой цели, в значительной мере зависит от ограничений, обусловленных методом решения задачи.

Если нам нужно знать лишь порядок величины, то подойдет одна группа допущений. Если же требуется получить точность 1 %, то «правильным» будет выбор другой группы допущений. Если для получения ответа отводится только один час, то принимаются совершенно иные допущения, чем в том случае, когда на решение задачи дается десять дней. Здесь необходимо руководствоваться здравым смыслом Во многом помогает накопленный опыт. Можно сделать еще несколько более конкретных замечаний.

Серьезную опасность представляет принятие допущений без должного их понимания. Ошибки, обусловленные тем, что опущены важные параметры, могут впоследствии всплывать и преследовать инженера на всем протяжении дальнейшей работы. Избежать этой ловушки можно лишь путем тщательного и полного учета всех факторов при построении модели и формулировке допущений. Однако во всех случаях, начиная и заканчивая анализ, неплохо проверять скрытые допущения. Другими словами, необходимо *знать о принимаемых допущениях*.

Обратимся теперь к некоторым обобщениям (допущениям), обычно используемым в инженерной практике.

Адиабатная стенка. В каком случае можно считать поверхность *адиабатной*? Разумеется, *в действительности* таких поверхностей нет. Вообще говоря, поверхность является адиабатной в том случае, когда проходящий через нее тепловой поток мал по сравнению с другими составляющими общего теплового потока, играющими существенную роль в данной задаче. Стенку можно считать адиабатной, если она имеет хорошую теплоизоляцию и если рассматривается стационарная задача. Стенку можно считать адиабатной и в том случае, если внутри нее в поперечном направлении наблюдается лишь весьма незначительное изменение температуры.

Заслуживает упоминания задача о теплоизолированной стенке в нестационарном состоянии. Теплоизоляционный материал может обладать значительной теплоемкостью. Таким образом, в переходном процессе тепловая энергия может поступать извне (или выходить во внешнее пространство) через теплоизоляционный материал. В таких случаях состояние теплоизоляционного материала, прилегающего к стенке, будет далеко не адиабатным.

Теплопередача — кинетический процесс. Для передачи тепла требуется некоторое время. Следовательно, в ряде задач поверхности можно считать адиабатными во многих случаях, представляющих практический интерес, даже если тепловой поток имеет довольно большую величину. Если промежуток времени мал, то перенос тепловой энергии может быть довольно мал по сравнению с другими процессами переноса энергии, рассматриваемыми в задаче.

Таким образом, теплоизолированные стенки могут быть не адиабатными, а стенки, не имеющие теплоизоляции,— адиабатными. При получении решения учитывается лишь влияние теплопередачи. Если это влияние мало, то им пренебрегают и поверхность, через которую проникает тепло, считается адиабатной.

Как понимать слова «малое влияние»? Это зависит от того, насколько точный ответ необходим и сколько времени отводится на решение задачи.

Идеальный газ. Разумеется, идеальный газ в природе не существует. Это просто модель. Однако при определенных условиях допущение о том, что реальные газы являются идеальными (т. е. ведут себя, подчиняясь закону $pv=RT$), приводит к весьма небольшим погрешностям. Обычным показателем того, что поведение газа близко к идеальному, является то, что давление низко, а температура высока по сравнению с соответствующими критическими параметрами. Жидкость или *смесь* жидкости и пара *нельзя* считать идеальным газом, не допуская при этом больших ошибок. (Иногда фазу пара в двухфазных смесях рассматривают как идеальный газ, однако это допустимо лишь при условии, что давление достаточно низко.) И в данном случае требуемая точность определяет, можно ли считать газ идеальным. При этом с самим газом ничего не происходит. Он остается таким же, как и был.

Упругая балка. Когда удовлетворяются допущения простейшей теории упругой балки? Ответить, «когда плоское поперечное сечение остается плоским»,— значит просто повторить вопрос. В каких случаях поперечные сечения действительно остаются плоскими? Прежде всего, разумеется, когда рассматриваются только *упругие* деформации. (Кстати, когда деформация является упругой?) Однако этого недостаточно. Высота балки должна быть мала по сравнению с ее длиной. Как мала? Обычно достаточно иметь отношение 1 : 100. А если отношение будет равно 1 : 50, или 1 : 25, или 1 : 10? Разумеется, все зависит от того, с какой точностью нужно получить результат.

Свойства констант. Инженеры имеют дело со свойствами веществ и материалов. Назовем некоторые из них: теплопроводность k; удельные теплоемкости C_p, C_v; вязкость μ; модуль упругости E; излучательная способность ε; плотность ρ; сопротивление, емкость и индуктивность R, C, L; коэффициент теплового расширения (α или β); сжимаемость K и т. д. Кроме того, часто инженеры имеют дело с такими характеристиками, как коэффициенты упругости, коэффициенты теплопередачи и т. д. В целях сокращения объема работы часто бывает полезно считать, что все эти свойства неизменны, а коэффициенты постоянны. Однако так почти никогда не бывает. Например, теплопроводность некоторых материалов существенно изменяется с изменением температуры. Таким образом изменяется и удельная теплоемкость. Вязкость заметно зависит от температуры и в некоторой мере от давления. Излучательная способность металла почти пропорциональна его абсолютной температуре. Электрические свойства также обнаруживают зависимость от температуры. Этот перечень можно продолжать до бесконечности.

Недостаток места не позволяет нам дать краткий обзор всех этих переменных и обрисовать характер их изменения. Наша цель здесь — просто напомнить, что все эти обычные параметры, которые так часто произвольно полагаются постоянными, в действительности являются переменными. Инженеры должны знать о принимаемых ими допущениях. Во многих задачах принятие допущения о постоянстве некоторых параметров совершенно правомерно и приводит к совсем небольшим погрешностям. В других случаях допущения о неизменности параметров необходимо подвергать тщательной проверке. Приобретя некоторый опыт, молодой инженер вскоре получит необходимую основу и сможет легко решить, как ему поступать в том или ином случае. Если возникнут сомнения, многие данные можно без труда почерпнуть из литературы.

Ньютоновская жидкость. Основным допущением, характеризующим ньютоновскую жидкость, является следующее: напряжение пропорционально скорости деформации. (Заметим, что понятие «упругого» твердого тела основано на допущении, что напряжение пропорционально деформации.) Коэффициент пропорциональности называется вязкостью μ. Как уже говорилось ранее, вязкость является функцией температуры и, в меньшей степени, давления. Почти все результаты, приводимые в специальной литературе по механике жидкостей и тепломеханике, основаны на допущении о ньютоновской жидкости. Действительно, в инженерных задачах большинство обычных жидкостей довольно хорошо удовлетворяет этому допущению.

Следует, однако, помнить, что в действительности жидкости не являются ньютоновскими, точно так же, как нет идеальных газов. Эти абстракции — ньютоновскую жидкость, идеальный газ и т. д.— изобрел человек. В определенных условиях свойства некоторых жидкостей оказываются довольно близкими к свойствам ньютоновской жидкости, или во всяком случае это допущение дает точность, приемлемую для практических целей. Однако при некоторых условиях (например, при очень больших скоростях изменения деформации) свойства некоторых обычных жидкостей (в частности, воды) обнаруживают значительное отклонение от свойств ньютоновской жидкости. Свойства некоторых жидкостей (например, клея) в обычном для них состоянии совершенно не похожи на свойства ньютоновской жидкости. Инженерам приходится иметь дело со *всякими* веществами, поэтому нужно знать, когда приемлемо допущение о ньютоновской жидкости, и быть уверенным в том, что такое допущение справедливо.

Сосредоточенные параметры. Наиболее часто допущения о сосредоточенных параметрах принимаются в электротехнике и динамике. Там это допущение столь обычно, что о нем редко упоминают. В действительности же не все сопротивление длинной проволоки, обозначаемое R, сосредоточено в одной точке. Масса также не бывает сосредоточена в одной точке. В одних условиях такие допущения совершенно справедливы, а в других принятие их приводит к совершенно бессмысленным результатам. В большинстве случаев не представляет труда определить эффект допущения о сосредоточенных параметрах. Однако этот вопрос нельзя упускать из виду, поскольку такие допущения *не всегда* справедливы.

Здесь были перечислены лишь немногие из обычных допущений, принимаемых инженерами при построении моделей. Другие допущения рассматриваются в задачах, приведенных в конце главы. Некоторые допущения читатель может вспомнить сам. В новых разработках появляются новые допущения. *Помните об этом*!

5.5. Порядок величины

Принятие допущений не обязательно должно основываться на субъективных ощущениях или вытекать из имеющихся данных. Гораздо чаще допущения принимаются на основе приближенных расчетов, называемых *оценкой порядка величины.* Читателю, по-видимому, известно, что в математике пренебрегают членами так называемых высоких порядков. Так, если δ — малое число, меньшее единицы, то допустимо пренебречь δ^2 *по сравнению с* δ или δ^3 по сравнению с δ^2. Например, при разложении в ряд Тейлора часто опускают члены высоких порядков. Следовательно, если при решении задач можно показать, что один член значительно меньше другого (т. е. на порядок), то можно сэкономить много труда. Нет необходимости находить точные числовые значения рассматриваемых членов, а достаточно лишь оценить их порядок. Часто при таких вычислениях бывает необходимо использовать числовые значения, и в этом помогает знание реального мира. Обычно порядок величины приближенно оценивается кратным десяти.

Стенку некоторого резервуара можно считать адиабатной, если удастся показать, что тепловой поток через нее мал по сравнению с тепловым потоком через некоторую другую стенку. В этом случае можно сравнивать $kA/\Delta x$ для двух данных стенок. Допустим, что, взяв некоторые реальные, но приближенные числа, мы нашли, что

$$\frac{(kA/\Delta x)_{\text{сечение 1}}}{(kA/\Delta x)_{\text{сечение 2}}}=O\cdot\frac{1}{10},$$

где O — порядок величины. Когда можно пренебречь тепловым потоком через первую стенку? Ответ на этот вопрос зависит от требуемой точности результата и времени, отпущенного для получения решения. Если бы это отношение равнялось 1 : 100 или 1 : 1000, то имелось бы веское основание пренебречь тепловым потоком через первую стенку, даже если полученная величина является приближенной. Не важно, получено ли соотношение 1 : 8, 1 : 10 или же 1 : 12. Важно лишь знать, что это отношение *порядка* 1 : 10, или *порядка* 1 : 1000, или же *порядка* 1 : 100.

При анализе порядка величины часто оказывается необходимым разлагать определенные функции в ряд. Конечно, многие из вас при изучении математики занимались разложением функций в ряды. Теперь это очень полезно вспомнить применительно к реальным задачам. Если, например, в задаче о тепловом потоке появляется член $1/(T—\Delta T)$, то его можно разложить так:

$$\frac{T}{T-\Delta T}=\frac{1}{1-(\Delta T/T)}=1+\frac{\Delta T}{T}+\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2+\dots .$$

Если отношение $\Delta T/T$ мало по сравнению с единицей, то приближенный результат примет вид

$$\frac{T}{T-\Delta T}\approx 1+\frac{\Delta T}{T}.$$

Известны либо могут быть легко найдены разложения в ряд других функций, например тригонометрических, показательных и т. д. Эти функции изучаются в математических дисциплинах, однако следует иметь в виду, что они часто используются при инженерном анализе.

Формулировку задачи (т. е. определение задачи и построение модели) лучше всего описать с помощью моделей, поэтому в остальной части этой главы дается решение трех задач. При их рассмотрении особое внимание уделяется формулировке задач. хотя здесь же приводится и полное решение.

5.6. Задача о теплоизоляции отопительной трубы

Постановка задачи. Недавно муниципалитетом одного из быстро растущих городов были приняты новые правила сооружения жилых зданий. В разделе этих правил, посвященном воздушному отоплению, указано, что подрядчики должны изолировать дополнительно трубы, по которым идет нагретый воздух, листовым асбестом толщиной 0,08 *см*, служащим в качестве теплоизолятора. Однако один из подрядчиков выразил свое несогласие с этой частью правил, заявив, что усиление теплоизоляции увеличивает, а не снижает потери тепла в этих трубах. Было созвано специальное совещание для рассмотрения этого вопроса, и городские власти пригласили инженера, чтобы тот высказался по поводу утверждения подрядчика.

Определение задачи. В этих условиях инженер столкнулся с довольно неопределенной ситуацией, хотя данный случай и не является редким. Инженер довольно быстро пришел к выводу, что ему нужно определить потери тепла в трубах с теплоизоляцией и без нее для ряда типичных условий. Каковы, впрочем, «типичные» условия, если они вообще существуют? По-видимому, этот вопрос можно обойти, если вывести вначале общее выражение для потерь тепла в трубах. Затем можно будет без труда подставить в него цифры, которые городские власти или подрядчик сочтут типичными. В любом случае, когда получено общее выражение, выполнить численные расчеты не представляет труда.

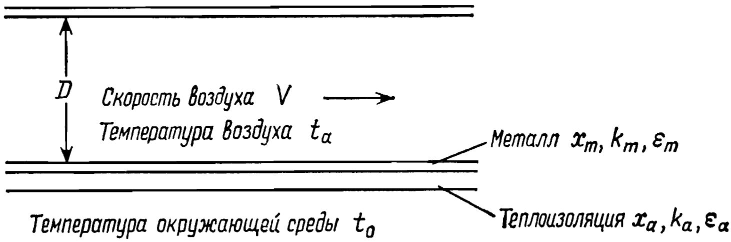


Рис. 5.2. Схема к задаче о теплоизоляции отопительной трубы.

Инженер должен еще учесть некоторые специфические моменты. Например, если он решил рассматривать расположенную горизонтально трубу с круглым сечением, то легко заметить, что при необходимости можно повторить весь вывод и для трубы с прямоугольным сечением. Кажется сомнительным, что получатся качественно иные результаты.

Инженер сформулировал свою задачу следующим образом (рис. 5.2). Найти выражение для потерь тепла на единицу длины трубы с теплоизоляцией и без нее при заданных значениях V, D, t_a, t_0, x_a, x_m, ε_a и ε_m. Потери происходят за счет передачи тепла окружающему пространству.

Теперь покажем, что же сделал инженер. От общей оценки («высказывания» по поводу постановки задачи) он перешел к конкретной задаче, которую можно решить инженерными методами. Позже, когда он получит уравнения и решит численные примеры, ему потребуется вернуться назад и произвести оценку и обобщение найденных результатов. В данном примере довольно легко показать, каким должно быть определение задачи. Однако читателя-студента не должна обманывать кажущаяся простота Когда работа уже проделана, она часто кажется простой.

Угадывание результата. Шутки ради и с целью тренировки попытайтесь теперь угадать, каким будет исход. Это неплохой способ выработать навык инженерной оценки. Процесс угадывания может также помочь глубже понять задачу, поскольку такой подход вынуждает рассматривать только наиболее существенные факторы. Например, в данном случае инженер понял, что усиление теплоизоляции увеличит тепловое сопротивление стенок трубы и, следовательно, снизит потери вследствие конвективной теплопередачи, так как температура наружной части стенок будет ниже. Чаще всего трубы изготавливают из оцинкованного листового железа или алюминия, причем в обоих случаях материал имеет низкую излучательную способность. В то же время листовой асбест отличается относительно высокой излучательной способностью, что увеличивает потери вследствие излучения. Какой эффект будет преобладать? Попытайтесь угадать прежде, чем продолжить чтение.

Инженер, решавший эту задачу, предположил, что усиление теплоизоляции практически не оказывает никакого влияния на потери тепла.

Кстати, многие студенты, получив эту задачу, вспоминают о «критическом радиусе», который они изучали в курсе теплотехники, и пытаются применить эту идею в данном случае. Почему к нашей задаче эта идея не подходит?

Построение модели. Инженер уже в какой-то мере приступил к построению модели, поскольку он решил рассматривать трубу круглого сечения. Это иллюстрирует тот факт, что этапы решения задачи могут перекрывать друг друга или менять свой порядок. Однако чаще всего большинство допущений принимается на этапе построения модели.

В этой задаче было принято несколько упрощающих допущений, которые существенно не меняют числового результата, но значительно снижают необходимый объем вычислений. Прежде всего, поскольку толщина стенок трубы и толщина теплоизоляции довольно малы по сравнению с радиусом трубы, целесообразно пренебречь ее кривизной. Разумеется, инженер будет вычислять коэффициенты теплопередачи, исходя из характера потока в трубе, а полученные значения использовать так же, как и в случае рассмотрения плоской поверхности. Чтобы убедиться, что это допущение справедливо, инженер может оценить порядок величин. Записав точное выражение для теплового сопротивления кольцевого теплоизоляционного (рис. 5.3)

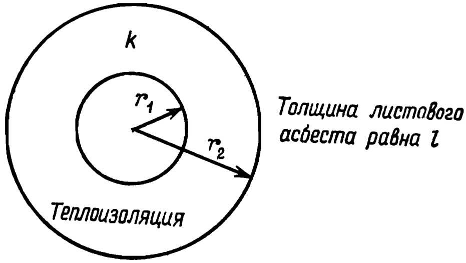


Рис. 5.3.

элемента, он получил

$$R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kl}.$$

Логарифм можно разложить в ряд

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \ldots .$$

Если $x = r_2/r_1$ и $r_2 = r_1 + x_a$, то

$$x - 1 = \frac{r_2}{r_1} - 1 = \frac{r_1 + x_a}{r_1} - 1 = 1 + \frac{x_a}{r_1} - 1 = \frac{x_a}{r_1}.$$

В нашей задаче $x_a/r_1 = 0{,}08/15{,}0 \approx 1/200$, поэтому значение $(x_a/r_1)^2$ пренебрежимо мало по сравнению с x_a/r_1. Таким образом,

$$\ln\frac{r_2}{r_1} \approx \frac{r_2}{r_1} - 1 = \frac{x_a}{r_1}.$$

Следовательно, тепловое сопротивление равно

$$R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kl} \approx \frac{x_a}{2\pi k r_1 l},$$

что совпадает с выражением для плоской пластинки площадью $2\pi r_1 l$.

Безусловно, нет необходимости выполнять такого рода вычисления каждый раз. Как и следовало ожидать, критерием является порядок величины x_a/r_1.

Второе допущение, которое должен принять инженер, касается условий движения потока внутри трубы. Является поток турбулентным или ламинарным? Путем проверки порядка числа Рейнольдса инженер может быстро принять решение. Он получает

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu} = \frac{3 \cdot 0{,}15}{0{,}18 \cdot 10^{-4}} = 2{,}5 \cdot 10^4.$$

Выполняется проверка размерности:

$$\frac{(м/сек) \cdot м}{м^2/сек}.$$

Это число Рейнольдса лежит в интервале значений, характерных для турбулентного потока; ясно, что допущение о турбулентном потоке совершенно оправдано. Заметим, что инженеру для этой проверки нужны *цифры*. Он использует трубу диаметром 15,0 *см*, скорость потока в которой составляет 180 *м/мин*. Обе эти величины приемлемы, но они относятся к нижней области интервала возможных значений. Кинетическую вязкость ν он берет из таблицы для температуры воздуха около 65° С.

Для построения полной модели инженер должен принять некоторые другие допущения. Он предположил, что снаружи трубы (которую он считает расположенной горизонтально) воздух неподвижен. Это дает ему возможность использовать соотношения для теплопередачи за счет естественной конвекции. Кроме того, инженера интересует, будет ли существенным тепловое сопротивление металлических стенок трубы по сравнению с тепловым сопротивлением теплоизоляции. Он решил провести сравнение путем оценки порядка величин. Ориентировочный расчет дал следующие результаты:

$$R'_{\text{внутр. защ. слой}} = \frac{1}{h'_i} \approx 0{,}041\ час \cdot м^2 \cdot {}^\circ C/ккал,$$

$$R'_{\text{мет}} = \frac{x'_m}{k'_m} \approx 0{,}0003\ час \cdot м^2 \cdot {}^\circ C/ккал,$$

$$R'_{\text{асб}} = \frac{x'_a}{k'_a} \approx 0{,}0205\ час \cdot м^2 \cdot {}^\circ C/ккал,$$

$$R'_{\text{наружн. защ. слой}} = \frac{1}{h'_0} \approx 0{,}102\ час \cdot м^2 \cdot {}^\circ C/ккал.$$

Сравнивая полученные значения, легко видеть, что если пренебречь тепловым сопротивлением металлической трубы, то это не изменит результата. Ввиду этого инженер решает пренебречь тепловым сопротивлением самой трубы.

Наконец, ему нужно рассмотреть потери на излучение. По-видимому, при таких температурах ими можно пренебречь, и инженер решает исключить эти потери из рассмотрения. Однако затем он вспоминает, что если этой величиной пренебречь, то упрямый подрядчик, считающий, что усиление теплоизоляции может усилить теплоотвод, был бы явно неправ. В действительности же, как мы увидим позже, именно излучение является *ключом* к решению этой задачи. Вспоминая, что обычно при таких относительно низких температурах излучение мало, инженер задает себе вопрос, каким образом оно может повлиять на результат. Вместо умозрительных рассуждений инженер приступает к оценке порядка величины. Для этой цели он полагает, что температура поверхности трубы составляет 50° С при температуре окружающего воздуха 20° С; излучательная способность равна 0,9, а коэффициент теплоотдачи поверхностного слоя составляет 4,88 *ккал/м²·час·*°С. Тогда плотность теплового конвективного потока, отходящего от этой поверхности, будет равна

$$q_{\text{конв}} = 4{,}88 \cdot (50 - 20) = 146 \ \textit{ккал/час} \cdot \textit{м}^2.$$

Плотность теплового излучения при условии, что окружающее пространство можно считать абсолютно черным телом, составит примерно

$$q_{\text{изл}} = \sigma\varepsilon\Delta\,(T^4) = 5{,}0 \cdot 0{,}9 \cdot (3{,}23^4 - 2{,}93^4) = 157 \ \textit{ккал/час} \cdot \textit{м}^2.$$

Эта весьма грубая оценка показывает, что при данных условиях излучение играет почти такую же роль, что и конвекция. Безусловно, нет оснований пренебрегать им, и поэтому инженер должен его учесть. Поскольку размеры трубы довольно малы по сравнению со значительным по объему окружающим пространством, инженер полагает, что коэффициент формы равен единице и что при заданной температуре окружающего пространства его можно считать абсолютно черным телом.

Теперь он получил модель: плоская поверхность, турбулентный поток внутри трубы, естественная конвекция снаружи, излучение в окружающее пространство, которое можно рассматривать абсолютно черным телом при коэффициенте формы, равном единице. Следующим этапом является использование физических принципов.

Использование физических принципов. Задача определена, и модель построена. Теперь задача подготовлена к решению на основе применения инженерных принципов.

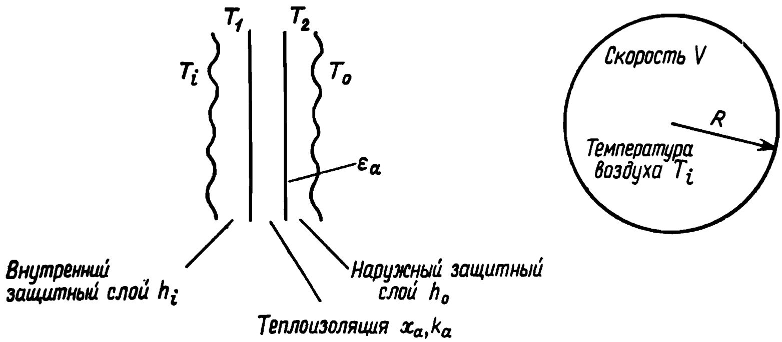
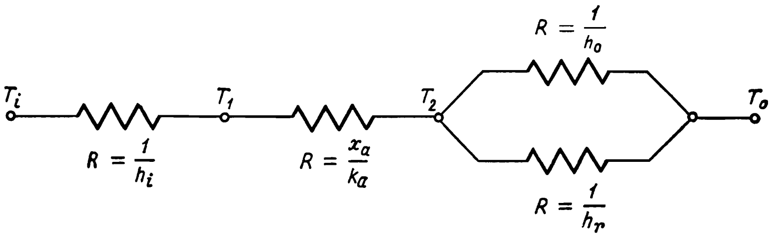


Рис. 5.4.

Данная глава посвящена формулировке задачи, и этот этап был только что завершен. Остальная часть решения приводится здесь для полноты изложения и может служить в качестве начального знакомства с последующими этапами. В дальнейшем, рассматривая применение физических принципов и проверок, будем считать, что читатель уже бегло ознакомился с соответствующими приемами на примере излагаемых данных.

Вначале инженер рассматривает трубу с теплоизоляцией. После этого он сможет решить задачу для другого случая, просто полагая, что толщина теплоизоляционного материала стремится к нулю. Схема на рис. 5.4 отражает сущность задачи; там же приводятся некоторые обозначения.

Вследствие того, что передача тепла от наружной поверхности осуществляется как путем конвекции, так и излучением, потери тепла нельзя найти, просто вычисляя общее тепловое сопротивление. Электрическая цепь — аналог данного случая выглядит следующим образом:



Пользуясь этой схемой, коэффициент излучения можно определить как

$$h_r = \frac{F_{23}\sigma\,(T_2^4 - T_0^4)}{T_2 - T_0}\,.$$

В нашем случае $F_{23} = \varepsilon_a$, поскольку коэффициент формы равен единице и окружающее пространство считается абсолютно черным телом. (Заметим, что для вычисления h_r нужно знать T_2, а для вычисления T_2 нужно знать h_r!) Используя электрический аналог, находим, что общее тепловое сопротивление равно

$$R = \frac{1}{h_i} + \frac{x_a}{k_a} + \frac{1}{h_0 + h_r}\,.$$

Следовательно,

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma R} = \frac{T_i - T_0}{(1/h_i) + (x_a/k_a) + [1/(h_0 + h_r)]}\,.$$

К сожалению, инженеру неизвестно значение h_r, поскольку он не знает T_2. Как найти T_2? Прежде, чем продолжить чтение, подумайте, как это сделать.

В стационарном состоянии (а здесь рассматривается именно этот случай) плотность теплового потока через внутренний и наружный защитные слои, а также слои теплоизоляции равна плотности теплового потока, отводимого от поверхности путем конвекции и излучения. Соответствующее соотношение имеет следующий вид:

$$q_{\text{общ}} = q_{\substack{\text{внутр. защ слой}\\ \text{и металл}}} = q_{\substack{\text{конв.}\\ \text{поверхн}}} + q_{\substack{\text{излуч}\\ \text{поверхн}}}$$

Основанием для записи уравнения в таком виде является то, что каждый из указанных тепловых потоков можно теперь выразить через T_2. Полученное уравнение позволяет перейти к уравнению, решив которое можно найти T_2. Заметим, что идея состоит в том, что *весь* тепловой поток проходит через внутренний и наружный защитные слои, а общий поток тепла отводится от поверхности в окружающее пространство двумя способами. Это пример того, когда задачу нельзя решить путем применения некоторого формального уравнения, например $\nabla^2 T = 0$.

Подставляя в записанное выше уравнение выражения для отдельных членов, получаем

$$\frac{1}{1/h_i + x_a/k_a}(T_i - T_2) = h_0(T_2 - T_0) + \varepsilon_a \sigma (T_2^4 - T_0^4).$$

Это уравнение для T_2, которое нам нужно решить. Когда T_2 будет получено, удастся найти, чему равен тепловой поток, подставляя значение T_2 в каждую часть этого уравнения.

Все члены уравнения известны, за исключением ε_a, h_0 и h_i. Инженер принимает излучательную способность ε равной 0,90 для тепловой изоляции и 0,3 для плоской трубы, поскольку эти значения приводятся в литературе как типичные. Чтобы найти h_i, инженер вспоминает (или находит) безразмерное соотношение для турбулентного потока в трубах

$$\mathrm{Nu} = 0{,}023\,(\mathrm{Re})^{0,8}\,(\mathrm{Pr})^{0,4},$$

или

$$\frac{hD}{k} = 0{,}023\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)^{0,8}\left(\frac{C_p \mu}{k}\right)^{0,4}.$$

Чтобы получить h_0, инженер находит эмпирическую зависимость для теплоотдачи при естественной конвекции от однократно нагретых горизонтально расположенных цилиндров [1)]

$$\mathrm{Nu}_D = 0{,}53\,(\mathrm{Gr}_D \mathrm{Pr})^{1/4}, \quad \mathrm{Pr} > 0{,}5, \quad 10^3 < \mathrm{Gr} < 10^9$$

$$\frac{hD}{k} = 0{,}53\left[\frac{C_p \rho g \beta\,(\Delta T)\,D^3}{\mu k}\right]^{1/4}.$$

---

1) См., например, McAdams W. H., Heat Transmission, 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

Известно также простое соотношение

$$h = 4{,}19\left(\frac{\Delta T}{D}\right)^{1/4},$$

где h выражается в *ккал/час*$\cdot$*м*$^2 \cdot$°C, T — в градусах Цельсия, а D — в метрах. Используя эти соотношения, можно найти все неизвестные и определить теплоотдачу. Кроме того, не представляет труда повторить вычисления для трубы без теплоизоляции. Сравнение результатов позволит получить ответ на поставленный вопрос.

Вычисления. Как указывалось выше, первым этапом при решении этой задачи является отыскание T_2 (рис. 5.4):

$$\frac{1}{1/h_i + x_a/k_a}(T_i - T_2) = h_0(T_2 - T_0) + \varepsilon_a\sigma(T_2^4 - T_0^4).$$

Решая задачу для случая использования теплоизоляции, инженер принимает в качестве типичных значений следующие цифры:

$x_a = 0{,}08$ *см*,
$k_a = 0{,}155$ *ккал/час*$\cdot$*м*$\cdot$°C,
$\varepsilon_a = 0{,}90$,
$T_i = 65°$ C,
$T_0 = 16°$ C,
$V = 240$ *м/сек*,
$R = 7{,}5$ *см* ($D = 15{,}0$ *см*).

Чтобы найти коэффициент теплоотдачи наружного защитного слоя, используем упрощенное уравнение

$$h_0 = 4{,}19\left(\frac{\Delta T}{D}\right)^{0{,}25} = 4{,}19\left(\frac{T_2 - T_0}{D}\right)^{0{,}25}.$$

Поскольку значение T_2 неизвестно, то нельзя сразу получить h_0. Находим коэффициент теплоотдачи внутреннего защитного слоя из выражения

$$h_i = \frac{k}{D}0{,}023\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)^{0{,}8}\left(\frac{C_p\mu}{k}\right)^{0{,}4},$$

которое после подстановки соответствующих цифр дает $h_i = 13{,}3$ *ккал/час*$\cdot$*м*$^2\cdot$°C. Теперь получаем

$$\frac{1}{1/h_i + x_a/k_a} = \frac{1}{\frac{1}{13{,}3} + \frac{0{,}0008}{0{,}155}} = 12{,}5\ \text{ккал/час}\cdot\text{м}^2\cdot{}^\circ\text{C}.$$

Полученное выше уравнение для T_2— уравнение с одним неизвестным, но его нельзя разрешить относительно T_2 в явном виде. Такие уравнения называются *трансцендентными*, и их нужно решать численными методами. В данном

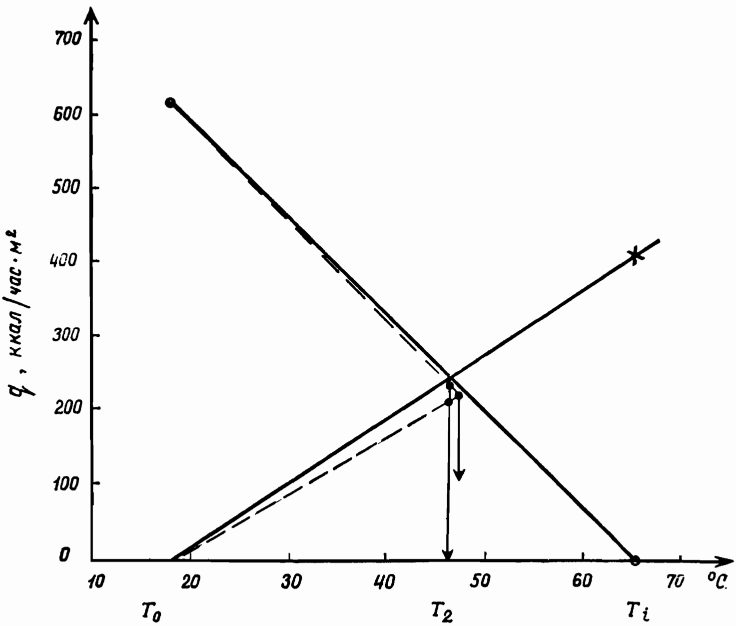


Рис. 5.5. Графический способ решения уравнения в задаче о теплоизоляции отопительной трубы:

$$q_{0(\text{конв. изл})}=h_0(T_2-T_0)+\varepsilon_a\sigma(T_2^4-T_0^4),$$

$$q_{i(\text{теплоизоляция})}=\frac{1}{1/h_i+x_a/k_a}(T_i-T_0).$$

случае подойдет простой метод проб и ошибок. При решении задачи методом проб и ошибок всегда нужно стремиться как можно быстрее *находить границы* (*пределы*), в которых лежит точный ответ, т. е. с самого начала нужно найти результат, который слишком велик, и результат, который слишком мал. Затем путем линейной интерполяции можно найти третье и последующие значения. В рассматриваемом примере ясно, что значение T_2 лежит между $T_i=65°$ C и $T_0=16°$ C. Таким образом, оба крайних значения уже известны. Они используются как пределы и не представляет труда заполнить первые два ряда табл. 5.1. По этим данным построены

Таблица 5.1

Результаты вычислений в задаче о теплоизоляции отопительной трубы

T_2 °C	$\frac{1}{1/h_i+x_a/k_a}(T_i-T_2)$	h_0	$h_0(T_2-T_0)+\varepsilon_a\sigma\left(T_2^4-T_0^4\right)$
65	0	2,61	405
16	612,0	—	0
46	237,5	2,30	224
46,5	230,5	2,32	228
47	224	2,33	234

Ответ: $T_2 = 46{,}6°$ C,
$q = 229{,}5$ *ккал/час·м²*

графики, изображенные на рис. 5.5. Путем линейной интерполяции находится третий результат: $T_2=46°$ C. Нанесение результатов вычислений на график (см. пунктирные линии) показывает, что четвертой точкой будет 46,5° C. В табл. 5.1 показаны дополнительные результаты вместе с окончательным:

$$T_2=46{,}6\,°\mathrm{C},\qquad q=229{,}5\ \textit{ккал/час}\cdot\textit{м}^2.$$

Аналогичные вычисления для трубы без теплоизоляции (которые предлагается выполнить в качестве упражнения интересующимся этим вопросом или скептически настроенным студентам) дают:

$$T_2=53{,}5°\,\mathrm{C},\qquad q=156\ \textit{ккал/час}\cdot\textit{м}^2.$$

Получен удивительный результат: усиление теплоизоляции увеличивает общие потери тепла. Заметьте, что это обусловлено излучением, влиянием которого, безусловно, нельзя пренебрегать.

Оценка, обобщение и выдача результатов. Лично для себя из этой работы инженер узнал, что в условиях естественной конвекции без тщательного исследования нельзя пренебрегать тепловым излучением. Кроме того, он пришел к выводу, что упрямый подрядчик, считавший, что в таких условиях теплоизоляция увеличивает теплоотдачу, оказался прав. Могли быть получены и другие числа, но разница между полученными значениями (229,5 и 156 *ккал/час*·$м^2$) столь велика, что этот вывод, по-видимому, справедлив. Инженер составил отчет о полученных результатах для представления муниципалитету. Прежде чем переходить к следующему вопросу, попытайтесь самостоятельно подготовить аналогичный отчет.

5.7. Игрушечная базука

Постановка задачи. Рассмотрим чертеж игрушечной базуки, изображенный на рис. 5.6 Ствол этого «грозного оружия» изготовлен из картонной трубы. «Снарядом» является тонкий пластмассовый колпачок, который вставляется

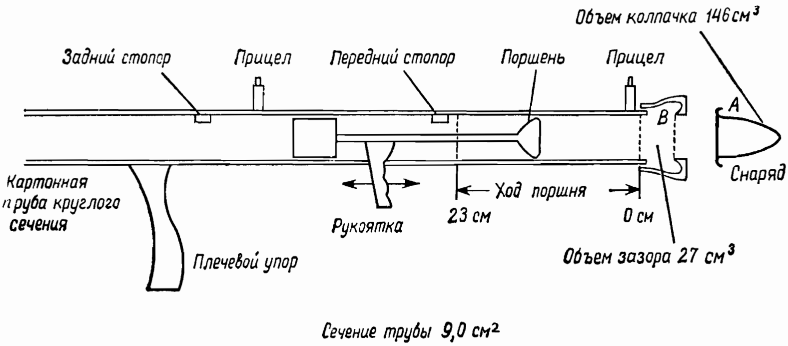


Рис. 5.6 Схема игрушечной базуки.

в ствол так, что его ободок *A* оказывается в положении *B*, заходя за изогнутый край ствола. Когда рукоятка, или «спусковое устройство», быстро перемещается вперед, колпачок освобождается и вылетает. Колпачок летит на расстояние 5—6 *м*, причем при вылете из базуки раздается звук выстрела, сила которого вполне удовлетворяет ребенка. Такие безобидные поделки были популярны несколько лет назад, пока не получили широкого распространения более грозные игрушки, имеющие больше сходства с реальным оружием (см. задачу 5.5).

Изображенную здесь базуку нужно переделать таким образом, чтобы она стала короче. В данной базуке максимальный ход поршня составляет 23 *см*. Испытания показали, что если движение начинается с 23-сантиметровой отметки, то самый короткий ход поршня, при котором происходит выстреливание колпачка, составляет 10 *см*. Это означает, что при быстром перемещении поршня от отметки 23 *см* до отметки 13 *см* произойдет выстреливание колпачка. Получив эти данные, инженер понял, что́ ему нужно сделать: нет необходимости, чтобы движение поршня начиналось с 23-сантиметровой отметки, однако оно должно заканчиваться на нулевой отметке. Поэтому нужно найти исходное положение поршня, при котором будет происходить выстреливание колпачка, если ход поршня оканчивается в точке с нулевой отметкой. Это позволит инженеру, уменьшив ход поршня, сократить длину базуки.

Кроме того, разработчика колпачка интересует, какое давление необходимо для выстреливания колпачка.

Прежде чем продолжать чтение, дайте определение задачи. Вначале нужно изучить рис. 5.6, чтобы понять, как работает базука.

Определение задачи. Чтобы определить задачу, инженер должен решить, что́ заставляет вылетать колпачок. Инженер быстро пришел к выводу, что это прежде всего давление (а не своего рода ударная волна). Он понял, что в подобном устройстве ручного действия не могут возникать звуковые скорости. (Однако многие студенты не замечают этого и поэтому дают совершенно бессмысленное определение задачи.) Если колпачок вылетает под действием давления, то инженеру нужно найти величину давления, при котором это происходит. Это будет его первой задачей. Затем он должен найти исходное положение поршня, при котором такое давление будет возникать в конечной точке хода поршня, т. е. на нулевой отметке.

Угадывание. При грубом приближении можно считать, что давление изменяется обратно пропорционально объему. Объем будет примерно пропорционален расстоянию от нулевой отметки до положения поршня плюс зазор, длину которого на глаз можно принять приблизительно равной

3 *см*. Следовательно, согласно имеющимся данным, объем в момент выстрела уменьшится и составит $(13+3)/(23+3)=16/26$ первоначального. Таким образом, давление будет равно около $\frac{26}{16}\cdot 1{,}0=1{,}62$ *кг/см²*. Это, по-видимому, вполне подходящая величина. Чтобы получить такое давление при самом коротком ходе поршня, потребуется, чтобы $l+3=\frac{26}{16}\cdot(3+0)=5$ или $l=2$ *см*. Инженеру показалось, что этого мало, но общая идея и порядок полученной величины правильны. Теперь инженер решил перейти к более точному анализу.

Обратите внимание на то, что догадки невозможны без понимания существа вопроса. Приучите себя делать их быстро и находить некоторые цифры. Это поможет вам отточить мастерство инженерной оценки.

Построение модели. Задача, которая была здесь определена, состоит в отыскании самого близкого к нулевой отметке исходного положения поршня, при котором произойдет выстреливание колпачка, и необходимого для этого давления. См. схему на стр. 142. Какие допущения необходимо принять, чтобы построить модель этого процесса?

Прежде всего, разумеется, инженер должен принять некоторое допущение о свойствах воздуха, сжатие которого происходит в стволе базуки. При нормальных атмосферных условиях свойства воздуха очень близки к свойствам идеального газа; при небольшом давлении, как в этой задаче, эти свойства сохраняются. Критическое давление воздуха составляет около 37 *атм*, а критическая температура — около —139° С. Поэтому даже при давлении, скажем, 2 *атм* можно ожидать, что свойства воздуха будут во многом близки свойствам идеального газа.

Второе допущение касается процесса сжатия. Является ли оно изотермическим, адиабатным или каким-либо еще? В данном случае, по-видимому, наиболее разумным будет допущение об адиабатном обратимом процессе сжатия. Инженер пришел к выводу, что рассматриваемый процесс будет практически адиабатным не ввиду наличия теплоизоляции, а ввиду того, что сжатие происходит очень быстро. В этом случае просто нет времени для отвода значительного количества тепла. Для проверки справедливости этого допущения инженер заметил, что если *нет* отвода тепла, то температура воздуха будет изменяться в соответствии с соотношением

$$T_1 P_1^{(1-k)/k} = T_2 P_2^{(1-k)/k}.$$

Используя приближенное отношение давлений $P_2/P_1=2$ и $T_1=21°$ С, инженер получил $T_2=86°$ С. Тогда количество отводимого тепла, необходимое для поддержания воздуха в изотермическом состоянии, будет равно

$$Q - W = \Delta E = 0,$$
$$Q = W = p\,dV = mRT_1 \ln \frac{P_2}{P_1}.$$

Зная объемы цилиндра, зазора и колпачка, инженер ориентировочно определил массу воздуха и нашел, что $Q=$ $=0{,}0053$ *ккал*. Далее он должен рассмотреть коэффициент теплопередачи. Инженер решил принять коэффициент конвективной теплоотдачи равным около 24,5 *ккал/м*^{2}·*час*·°С, поскольку движение поршня создает некоторую турбулентность. Кроме того, он заметил, что процесс сжатия занимает менее 1 *сек*, но решил принять это время равным 1 *сек*, хотя, по-видимому, это очень много. Наконец, он вычислил среднюю площадь стенок ствола базуки, через которые происходит отвод тепла в процессе сжатия воздуха. Затем он записал соотношение

$$Q = 0{,}0053 = hA(\Delta T)_{\text{ср}}\,(\text{Время})$$

и нашел, что

$$(\Delta T)_{\text{ср}} = 28°\,\text{C}.$$

Это означает, что для отдачи необходимого количества тепла средняя разность температур должна составлять не менее 28° С. Вряд ли такой процесс можно считать изотермическим. В то же время поскольку при изменении температуры в среднем примерно на 28° С воздух будет испытывать только адиабатное сжатие (от 21 до 86° С), то окончательно ясно, что теплоотдачей пренебрегать нельзя. Инженер заметил, что, по-видимому, «справедливо» некоторое политропное расширение Pv^n, где $1<n<k$, и решил считать, что допущению об адиабатном процессе соответствует предельный случай. По-видимому, в качестве другого предельного случая он будет рассматривать изотермический процесс.

Модель сводится к следующему механизму. Происходит обратимое адиабатное сжатие идеального газа. Что необходимо для обратимого процесса? Процесс должен протекать при отсутствии трения (т. е. без внутреннего трения, поскольку рассматривается только воздух), а также медленно. Что означает «медленно»? Настолько медленно, чтобы не происходило образования ударных фронтов. Таким образом, «медленно» означает меньше скорости звука. Человек может вызвать настоящую ударную волну, взмахнув хлыстом, но вряд ли ему это удастся, воздействуя непосредственно на поршень игрушечной базуки. (За сколько времени нужно было бы переместить поршень, скажем, на 15 *см*?) Разумеется, в воздухе будут наблюдаться турбулентность и внутреннее трение, но инженер решает ими пренебречь, поскольку они малы по сравнению с другими факторами, действующими в данной задаче. Тогда сжатие воздуха можно будет считать внутренне обратимым.

Таким образом, инженер построил свою модель.

Вычисления. В этой задаче вычисления довольно просты и выполнение их не вызывает затруднений. Для обратимого адиабатного сжатия

$$P_1 v_1^k = P_2 v_2^k,$$

где $P_1 = 1$ *кг/см²*,

$$v_1 = 146 + 27 + 23 \cdot 9{,}0 = 380 \text{ см}^3,$$
$$v_2 = 146 + 27 + 13 \cdot 9{,}0 = 290 \text{ см}^3,$$
$$k = 1{,}4.$$

Необходимо найти P_2. Получаем

$$P_2 = P_1 \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^k = 1{,}0 \cdot \left(\frac{380}{290}\right)^{1{,}4} = 1{,}46 \text{ кг/см}^2.$$

Таким образом, давление, необходимое для выстреливания колпачка, равно 1,46 *кг/см²*. При ходе поршня, заканчивающемся в точке с нулевой отметкой, такое давление должно быть именно в этой точке при атмосферном давлении в исходной точке. Поскольку Pv^k — постоянная, новое исходное положение поршня можно найти двумя способами. Используя соотношение

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)_{\text{стар}} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)_{\text{нов}},$$

получаем

$$(\nu_1)_{\text{нов}} = (\nu_2)_{\text{нов}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)_{\text{стар}} = (146 + 27) \cdot \frac{380}{290} = 227 \ \textit{см}^3.$$

Таким образом, новое исходное положение поршня определяется точкой x:

$$146 + 27 + 9{,}0x = 227, \quad x = 6 \ \textit{см}.$$

Идя другим способом, можно вычислить $(\nu_1)_{\text{нов}}$ из соотношения

$$P_1 \nu_1^k = P_2 \nu_2^k,$$

где

$$P_1 = 1 \ \textit{кг/см}^2,$$

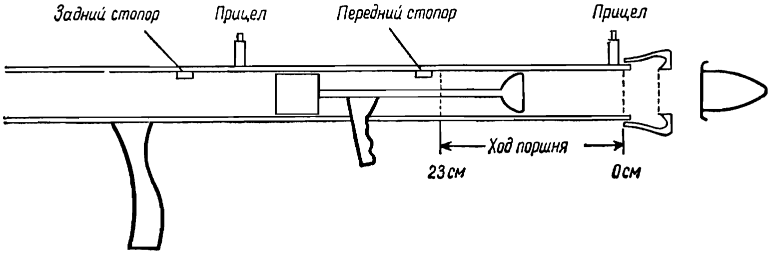
$$P_2 = 1{,}46 \ \textit{кг/см}^2,$$

$$\nu_2 = 173 = 146 + 27 \ \textit{см}^3.$$

Результат такой же.

Таблица 5.2

Отчет о результатах, полученных в задаче об игрушечной базуке



Задача:

1. Исследовать возможность уменьшения длины базуки путем сокращения хода поршня.

2. Определить давление, необходимое для выстреливания колпачка.

Результаты:

1. Теоретический анализ показывает, что ход поршня можно укоротить примерно до 7 *см*, если поршень будет двигаться от 7-сантиметровой до нулевой отметки, показанной на рисунке. Кроме того, сокращение хода поршня возможно также при таком изменении конструкции, которое позволяет уменьшить объем колпачка, объем зазора либо увеличить площадь днища поршня.

2. Если сжатие изотермическое, то требуемое давление равно 1,36 *кг/см*^{2}. Если же сжатие адиабатное, то 1,46 *кг/см*^{2}. Точный ответ заключен между этими предельными значениями. Чтобы получить более точный ответ, необходимо провести эксперимент.

Если считать, что сжатие изотермическое, то результат, определяющий новое исходное положение, не изменится. Однако необходимое давление теперь будет вычисляться из соотношения

$$P_1 v_1 = P_2 v_2,$$

откуда $P_2 = 1{,}36$ *кг/см²*. Таким образом, в любом случае можно укоротить длину ствола таким образом, чтобы поршень двигался от 6-сантиметровой до нулевой отметки. Инженер замечает также, что ход поршня можно уменьшить и другими способами. Если, например, уменьшить объем зазора или объем колпачка или, скажем, увеличить площадь поршня, то требуемому изменению объема будет соответствовать более короткий ход поршня.

Выдача результатов. В простейшей задаче такого рода результаты, по-видимому, лучше всего выдавать в устной форме. Потребуется лишь очень короткое сообщение, например такое, какое приведено в табл. 5.2.

5.8. Высокоскоростной ременной привод

Постановка задачи. Фирма, изготовляющая обычные сверлильные станки и перфораторы, разработала маломощный высокоскоростной сверлильный станок. В опытном образце нового станка плоский кожаный ременной привод и шкив неоднократно выходили из строя. Ременной привод был разработан на том же принципе, который успешно использовался фирмой ранее во многих других моделях. В табл. 5.3 дается описание этого привода. Одному из инженеров было поручено выработать рекомендации по внесению в конструкцию привода необходимых изменений и, кроме того, выяснить, почему в данном случае неприемлем уже зарекомендовавший себя принцип.

Прежде чем продолжать чтение, попытайтесь самостоятельно дать определение задачи, построить модель и найти решение.

Определение задачи. В этой работе инженер должен превратить задание «отыскать причины неполадок» в задачу, которую можно анализировать. Что *могло* вызывать неполадки? Чтобы избежать очевидных ошибок, инженер проверил цифры, приведенные в описании привода, и обнаружил, что

Таблица 5.3

Описание ременного привода старого образца

Ременной привод для высокоскоростного перфоратора 4-XR2

Технические характеристики

Плоский кожаный ремень, $\rho=0{,}001$ *кг/см*^{3}, $\sigma_{раб}=19{,}4$ *кг/см*^{2}
Диаметр шкива $d=15$ *см*
Угол обхвата $\theta=180°$
Скорость вращения 3000 *об/мин*
Мощность 0,2 *квт*

Допущения

Коэффициент трения $\mu=0{,}20$

Вывод уравнений

Мощность (*квт*)$=\dfrac{T_1-T_2}{102}V$, T_1 и T_2 в килограммах, V в метрах в секунду

$$\frac{T_1}{T_2}=e^{\mu\theta}$$

Решение уравнения дает

$T_1=1{,}77$ *кг*, $T_2=0{,}94$ *кг*

Минимальная площадь поперечного сечения ремня

$$A=\frac{1{,}77}{19{,}4}=0{,}090\ см^2$$

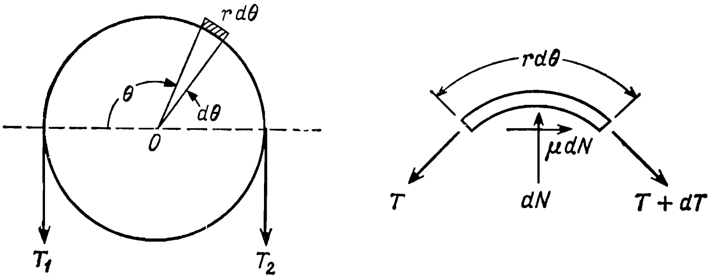
Таким образом, подойдет стандартный ремень сечением $6\times1{,}6$ *мм*^{2} ($A=0{,}096$ *см*^{2}).

с арифметикой здесь все в порядке. Он проверил также технические условия и обнаружил, что они отвечают стандартам и обеспечивают запас прочности. Ранее при разработке аналогичных приводов никаких затруднений не возникало.

Поскольку отличительной особенностью нового сверлильного станка является высокая скорость, инженер догадывается, что в определенной мере это обстоятельство должно было повлиять на конструкцию привода, но не было учтено при анализе. Каково это влияние? Инженеру это неизвестно. (А вам? Подумайте об этом!) Инженер решил проделать всю работу с самого начала и заново вывести основные уравнения, чтобы убедиться в том, что не были приняты какие-либо необоснованные допущения. Особенно его интересовал вывод уравнения $T_1/T_2=e^{\mu\theta}$, встречающегося в описании привода.

Теперь задача определяется следующим образом. Проанализировать механику движения высокоскоростного приводного ремня со шкивом и найти соотношение между T_1, T_2, μ, θ, r, w, а также необходимую мощность.

Построение модели. После выполнения чертежа, изображенного на рис. 5.7, инженер практически уже распола-



Равновесие радиальных сил $\quad dN = T\sin\frac{d\theta}{2} + (T + dT)\sin\frac{d\theta}{2} = T\,d\theta$

Равновесие тангенциальных сил $\quad \mu dN + (T + dT)\cos\frac{d\theta}{2} = T\cos\frac{d\theta}{2}$

Рис. 5.7.

гал нужной ему моделью. Он предположил, что угол обхвата равен 180° и что μ — постоянная. Далее он пренебрег изгибающими напряжениями в ремне и какими-либо изменениями площади поперечного сечения ремня вследствие изменения растягивающего усилия. Кроме того, он решил пренебречь влиянием центробежной силы на ремень.

Использование физических принципов. Если пренебречь энергией, затрачиваемой на изгиб ремня, то уравнение мощности, приведенное в описании ременного привода старого образца, будет справедливо, т. е.

$$\text{Мощность } (\mathit{квт}) = \frac{(T_1 - T_2)\,V}{102}.$$

Здесь T в килограммах, а V в *м/сек*. Уравнение равновесия радиальных сил, действующих на элемент ремня, имеет вид

$$dN = T \sin\frac{d\theta}{2} + (T + dT) \sin\frac{d\theta}{2}.$$

Поскольку для малых углов $\sin\alpha = \alpha$, это уравнение можно записать как

$$dN = T d\theta.$$

Уравнение равновесия для тангенциальных сил имеет вид

$$\mu\, dN + (T + dT) \cos\frac{d\theta}{2} = T \cos\frac{d\theta}{2}.$$

Поскольку для малых углов $\cos\alpha \approx 1$, это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\mu\, dN = -dT.$$

Рассматривая совместно уравнения $dN = Td\theta$ и $\mu\, dN = -dT$, исключаем dN и, интегрируя, получаем

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta}.$$

Оценка и обобщение. Поскольку для расчета выходящих из строя ремней использовалось именно это уравнение, теперь инженер уверен, что либо энергия изгиба, либо центробежная сила, которыми пренебрегали, при новых, более высоких скоростях становятся весьма существенными факторами. Недолгое размышление позволяет обнаружить следующее: маловероятно, чтобы при более высоких скоростях произошло заметное увеличение энергии изгиба, которая, по-видимому, пропорциональна V. В то же время центробежная сила пропорциональна V^2. Поэтому инженер решил пересмотреть допущение о центробежной силе и включить ее в анализ.

Построение модели. Выполняется так же, как и ранее, только теперь учитывается влияние центробежной силы.

Использование физических принципов. Уравнение энергии и уравнение равновесия для тангенциальных сил остаются в прежнем виде, а уравнение равновесия для радиальных сил принимает вид

$$dN + \frac{wV^2}{gr} r\, d\theta = T \sin\frac{d\theta}{2} + (T + dT) \sin\frac{d\theta}{2},$$

$$dN = \left(T - \frac{wV^2}{g}\right) d\theta.$$

Рассматривая совместно оба уравнения и интегрируя, получаем

$$\frac{T_1 - (wV^2/g)}{T_2 - (wV^2/g)} = e^{\mu\theta}.$$

Этот результат ясно показывает, что если член wV^2/g не мал по сравнению с T_1 и T_2, то влиянием центробежной силы пренебрегать нельзя.

Вычисления. Проверяя ремень старой конструкции, инженер нашел, что $wV^2/g=0{,}57$ *кг*. Ясно, что при $T_1=1{,}77$ *кг* и $T_2=0{,}94$ *кг* этой величиной пренебрегать нельзя. При разработке нового ремня с использованием полученного выше точного уравнения инженер получил $T_1=2{,}36$ *кг* и $T_2=1{,}53$ *кг*. Таким образом, необходимая площадь поперечного сечения ремня равна

$$A = \frac{2{,}36}{19{,}4} = 0{,}122 \text{ см}^2.$$

(Заметим, что в ремне старой конструкции напряжение составляло $2{,}36/0{,}096=24{,}6$ *кг/см*^{2}, что значительно превышает рекомендуемое рабочее напряжение. Этим и объясняется выход ремней из строя.) Выбранный новый ремень с сечением $2{,}4\times6$ *мм*^{2} будет работать нормально.

Оценка, обобщение и представление результатов. Инженер установил, что, разрабатывая высокоскоростной ременной привод, важно учитывать центробежную силу. Кроме того, он понял, что означает «высокая» скорость. Если значение wV^2/g сравнимо с T_2, то можно считать, что скорость высока. Некоторое увеличение толщины ремня позволит устранить неполадки, и при последующих разработках фирмой высокоскоростных ременных приводов следует пользоваться вновь выведенным уравнением. Читателю предлагается составить отчет о полученных результатах размером в одну страницу.

5.9. О небрежности в работе

Прежде чем закончить эту главу, следует сказать несколько слов о небрежности в работе. Встречаются два вида небрежной работы. Небрежность первого рода связана с оформлением материалов. Сюда относятся неразборчивые записи и неаккуратные рисунки, использование грязной, нестандартной бумаги, бессистемный учет данных. Небрежность второго рода обусловлена психологическими особенностями личности инженера. Процесс инженерного анализа предполагает исключение обоих видов небрежности, поскольку часто они бывают связаны друг с другом. Разумеется, аккуратность не заменяет компетентности, но она может способствовать снижению вероятности появления ошибок различного рода.

Необходимо сделать еще одно замечание об аккуратности. Иногда студенты обнаруживают личную и профессиональную незрелость, доходя до нелепых крайностей при оценке порядка величины и принятии допущений, а также при построении моделей. Они принимают приближенные оценки, сделанные для обоснования допущений, как точные или окончательные цифры. Или же вместо того, чтобы потрудиться и вычислить интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, студенты могут взять только некоторое среднее значение x и вычислить $f(x)\,(x_2—x_1)$. Такого рода небрежность непростительна, если только она не диктуется ограничениями, налагаемыми на инженера, решающего задачу. Дело здесь в следующем. Нельзя смешивать обоснованное построение упрощенной модели с обычной небрежностью, допускаемой вследствие профессиональной незрелости, лени или недостатка знаний. Избежать этой ошибки можно в том случае, если имеется четкое представление о том, что делается и почему. В технике нет места для небрежности. Модели и аппроксимации должны строиться так, чтобы приводить к результатам, совпадающим с характеристиками реальной действительности.

5.10. Краткие выводы

Эта глава посвящена главным образом определению задачи и построению модели для инженерного анализа. Здесь указывалось, что определение задачи должно предполагать получение количественного результата и что модель должна быть достаточно простой, чтобы с ее помощью можно было получить решение при заданных ограничениях, и в то же время достаточно сложной, чтобы эти результаты имели смысл. Рассматривались также некоторые способы принятия правильных допущений, особенно при оценке порядка величины. Наконец, были рассмотрены три примера, показывающие этот процесс в действии.

Теперь наступило время более подробно рассмотреть использование физических принципов в процессе инженерного анализа. Как указывалось в первой главе, лучше всего применять физические принципы в их наиболее общей и простой форме. Следующая глава и посвящена этому вопросу.

Задачи

5.1. Когда процесс является термодинамически обратимым? Почему инженеры используют модель обратимого процесса? Как инженеры выходят из положения, когда становится известно, что определенные процессы не являются обратимыми?

5.2. Что такое жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение? Когда это допущение полезно или имеет смысл?

5.3. Обычно металлические детали подвергают простым испытаниям на разрыв, сжатие и кручение. Какие модели используются обычно для прогнозирования выхода детали из строя, обусловленного совместным действием этих напряжений?

5.4. Можете ли вы вспомнить некоторые не рассмотренные в этой книге обобщения, принимаемые при построении моделей? Назовите их и обсудите.

5.5. Обычная стеклянная бутылка, наполненная холодной жидкостью, закрыта пробкой. Можно ли сказать, что пробка является адиабатной? Той же пробкой при тех же условиях закрыт термос. Можно ли сказать, что в этом случае пробка является адиабатной? Постарайтесь обосновать ваши допущения.

5.6. Исследуйте некоторые задачи, которые вы решали при изучении технических дисциплин (теплотехники, динамики, гидродинамики, сопротивления материалов и т. д.). Какого рода допущения необходимо при этом принимать? Знаете ли вы, как это надо было делать? Какие «неизбежные» допущения, связанные с формулировками задач, отличают их от реальных задач? Почему при изучении этих дисциплин было оправданным перескочить через этапы определения задачи и построения модели?

5.7. Из досок бальзового дерева толщиной 2,5 *см* сделан открытый ящик с внутренними размерами $30 \times 30 \times 7{,}5$ *см*. Этот ящик на 6,4 *см* наполнен водой, имеющей температуру $+2°$ C, и помещен на полку большого холодильника, в котором поддерживается температура $-18°$ C. Допустим, что вам предложено определить примерное время, необходимое для образования слоя льда толщиной 1,3 *см*. Какую модель вы построите? Назовите примерное время. Вычислите результат. Проведите эксперимент для проверки правильности ваших вычислений.

5.8. Алюминиевая заготовка диаметром 127 *мм* и длиной 60 *см* нагрета в печи до температуры 540° C. Если эту заготовку охлаждать в цехе на открытом стеллаже, то сколько времени потребуется для того, чтобы ее температура понизилась до 500° C? Постройте модель. Сделайте предположение. Вычислите ответ.

5.9. Через сколько времени после выключения 60-ваттной электрической лампочки можно смело к ней прикасаться? Дайте определение задачи, постройте модель, сделайте предположение, а затем найдите решение.

5.10. С целью тренировки в оценке порядка величины попытайтесь определить:

1) среднее потребление воды в домашних условиях на одного человека;
2) суточную потерю воды за счет испарения на квадратный метр пресноводного бассейна;
3) емкость домашней ванны;
4) расход воды в обычном водопроводном кране;

5) температуру крыши автомобиля на открытой стоянке в солнечный августовский день в вашем городе;
6) коэффициент полезного действия установки для кондиционирования воздуха;
7) потери тепла в домашнем водоподогре⁻ателе емкостью 110 *л*;
8) величину теплового расширения паропровода длиной 30 *м*;
9) прогиб стандартной двутавровой балки высотой 5 *см* и длиной 3 *м*, у которой один конец заделан, а на другом, свободном, находится груз 180 *кг*.

Поставьте самостоятельно другие вопросы такого же характера и дайте на них ответ.

5.11. При оценке и принятии допущений очень полезно «чувствовать» количественные различия аналогичных характеристик разных материалов. Попытайтесь, например, сказать:

1) Какова плотность стали, алюминия, бальзового дерева, дуба, пластмассы, воздуха и т. д.?

2) Какова температура плавления стали, алюминия, ртути, углекислоты и т. д.?

3) Каков предел текучести стали, алюминия, бальзового дерева, дуба, пластмассы, стекла и т. д.?

4) Какова теплопроводность стали, алюминия, бальзового дерева, воды, льда, воздуха и т. д.?

5) Как изменяется теплопроводность (по величине и направлению) стали, алюминия, дерева, воздуха и т. д. при изменении температуры?

5.12. Допустим, что вы — Джон, тот самый инженер, которому в примере, рассматривавшемся в гл. 4, было поручено исследование фильеры. Дайте определение задачи. Постройте модель, сформулировав соответствующие допущения для первого ориентировочного анализа. [Полное решение приводится в статье Osterle J.F., Dixon J. R., Viscous Lubrication in Wire Drawing, *Trans. Am. Soc. Lubricating Engrs.*, **5** (1) (1962)].

5.13. Через пролет шириной 6 *м* перекинута двутавровая балка, к которой подвешен кран грузоподъемностью 450 *кг*. Какую модель вы построите при расчете этой балки? Будете ли вы учитывать ударные нагрузки и другие нестатические условия?

5.14. Необходимо разработать резервуар цилиндрической формы для хранения сжатого воздуха при давлении 30 *кг/см*². Какую модель вы построите, чтобы рассчитать систему заклепок для этого резервуара?

5.15. При изучении проблем, связанных с движением транспортных потоков, требуется дать объяснение обычного дорожно-транспортного происшествия, которое происходит, когда в длинном ряду транспорта первый автомобиль резко тормозит или внезапно останавливается. В этом случае обычно третий или четвертый автомобиль наезжает на автомобиль, идущий впереди. Какую бы модель вы предложили для учета факторов, влияющих на движение автомобиля при этих условиях?

5.16. Как бы вы попытались прогнозировать транспортный поток между двумя городами или между двумя данными районами одного города, рассматривая потребность в автомобильных дорогах для будущего?

5.17. Какие допущения неизбежны в большинстве задач о смазке?

5.18. Какую модель воздуха, поступающего в вентилятор, вы бы приняли, разрабатывая настольный вентилятор для учреждения? Какую модель воздуха вы бы приняли при разработке воздушного компрессора?

5.19. Один из инженеров, недавно окончивших институт, поступил на работу в фирму, где применялось несколько больших подъемных кранов. Поскольку этот молодой человек отличался внимательностью и был наблюдателен, он заметил, что крюки работавших кранов очень тяжелы. Поэтому с разрешения своего начальника он разработал новые крюки, и один крюк был изготовлен для проведения испытаний. При первом же испытании начальник приказал оператору крана поднимать максимальный груз быстро и с первоначальным рывком. Новый крюк сразу же сломался. В чем была ошибочна модель молодого инженера? Как можно избежать ошибки такого рода?

5.20. Выясните, как изменяются с изменением температуры, давления и влажности следующие параметры:

1) излучательная способность алюминия;
2) теплопроводность меди;
3) коэффициент теплового расширения стали;
4) модуль упругости воды;
5) удельная теплоемкость воздуха;
6) длина человеческого волоса;
7) электропроводность меди?

5.21. В динамике обычно пренебрегают массой пружин, хотя в действительности пружина имеет распределенную массу. Найдите массу M, которая, будучи присоединенной к невесомой пружине с постоянной k, имеет ту же самую частоту собственных колебаний, что и пружина с распределенной массой m. Силой тяжести можно пренебречь.

ГЛАВА 6

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ

6.1. Введение

Изучая технические дисциплины, студенты знакомятся с физическими принципами, законами, правилами и эмпирическими данными, относящимися к определенной области знания. Цель «инженерного проектирования» — научить студентов целеустремленно применять те знания, которыми они уже обладают. Это делается по той причине, что при изучении технических дисциплин таким этапам решения инженерных задач, как определение задачи и построение модели, уделяется мало внимания. Исключение этих этапов из рассмотрения дает возможность сосредоточить больше внимания на изучении самих физических принципов. Цель такого предмета, как «инженерное проектирование»,— последовательное рассмотрение всего процесса решения задачи. Так, в предыдущей главе этой книги были рассмотрены определение задачи и построение модели. Далее будут изучены такие этапы, как оценка, обобщение и выдача результатов. В этой главе дается общий обзор физических принципов, используемых при решении инженерных задач. Совершенно очевидно, что вследствие недостатка места здесь мы ограничимся лишь краткой характеристикой различных физических принципов, законов и правил. Наша задача заключается не в том, чтобы научить, как пользоваться физическими принципами, законами и правилами, а в том, чтобы обратить внимание на основные моменты и кратко изложить своего рода философию применения физических принципов.

Во всех случаях лучше всего использовать физические принципы, законы и правила в их наиболее чистом, простом и фундаментальном виде. Уравнения, полученные из исходных формул, а также специальные и сложные уравнения используются в частных случаях, и в соответствующих конкретных условиях они оказываются очень полезными. Однако в общем случае и особенно в новых и необычных условиях желательно использовать только основные и простейшие физические принципы.

Вопрос применения физических принципов в их наиболее элементарной форме настолько важен, что целесообразно остановиться на нем более детально. Рассмотрим следующие две группы понятий:

символы	действительность
уравнения	физические принципы
знание	понимание

Символ невеществен. Можно придумать много бессмысленных символов. Слова и другие символы не обязательно должны что-либо обозначать. Весьма часто это только чернила на бумаге, мел на доске, звуковые волны в воздухе. Более того, уравнения, которые выражают связь между символами, не всегда правильны или имеют смысл.

Все это свидетельствует о том, что знать еще не означает понимать. Если вы написали уравнение $d'Q—d'W=dE$, то это еще не значит, что вы понимаете первый закон термодинамики. Если вы знаете какое-либо уравнение и входящие в него символы, то это еще почти ничего не говорит о вашем понимании самого принципа и физических явлений, стоящих за этими символами.

Как определить, что вы понимаете суть этого принципа? Разумеется, только путем *использования* его на практике для получения результата, совпадающего с реально наблюдаемым! Единственный способ доказать, что вы понимаете существо физического принципа,— это продемонстрировать его использование при решении конкретной задачи. Данное утверждение справедливо и в более общем смысле, однако достаточно привести такой простой пример. Студенты часто говорят своим профессорам: «Я на самом деле понимаю материал, но просто не могу решить задачу!» Абсолютная нелепость! Они обманывают только самих себя, а не своих профессоров, которым, конечно, известно, что эти студенты *знают* уравнения и символы, но *не понимают* принципов и реальных явлений, стоящих за этими символами. По этой причине в данной книге подчеркивается необходимость использования физических принципов в их наиболее фундаментальном виде.

Прежде чем идти дальше, необходимо сказать несколько слов о векторах. Эта книга предназначена как для читателей, знакомых с векторами, так и для тех, кто еще не познакомился с ними. Все уравнения, записанные в векторной форме, повторяются или объясняются в скалярной записи. Важно, чтобы читатель умел описывать реальные явления с помощью символов и мог переходить от символов к реальным явлениям.

6.2. Формальный и концептуальный подходы

Выше было сказано, что при решении инженерных задач следует использовать *основные* законы природы, а не специальные или частные уравнения, выведенные как следствия из более общих законов. Таким образом, при решении задач рекомендуется *непосредственно* применять второй закон Ньютона, первый и второй законы термодинамики и закон сохранения массы. На данном этапе всегда возникает вопрос, что означает слово «основной». Какие законы являются основными? Этот вопрос мы проиллюстрируем на следующем примере.

Решение задачи о теплопроводности всегда можно начать с применения уравнения теплопроводности Фурье в его формальном виде

$$\alpha\nabla^2 T + \frac{G}{\rho C} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Решая простую одномерную стационарную задачу о теплопередаче при отсутствии внутреннего источника тепла, можно просто вычеркнуть некоторые члены записанного выше уравнения и получить

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0.$$

Такой вывод конкретных уравнений из общего, которое предположительно мы получили ранее, запомнили и теперь использовали, в этой книге мы будем называть *формальным подходом*. В некоторой мере этот подход удовлетворяет желанию иметь дело с основными физическими принципами. Никому не хочется запоминать конкретный результат, например, уравнение $d^2T/dx^2=0$, используемое в одномерной стационарной задаче о теплопередаче при отсутствии внутреннего источника, потому что пришлось бы запоминать тысячи таких же тривиальных выражений. Предпочтительнее хранить в памяти общее уравнение $\alpha\nabla^2 T + G/\rho C = \partial T/\partial t$. Однако, как мы увидим, и это общее уравнение не является столь уж фундаментальным, как нам кажется. Формальные уравнения такого рода сами получены на основе более общих принципов. Всякий раз, когда это возможно, студенты должны выводить дифференциальные уравнения путем непосредственного применения в своей задаче соответствующего физического принципа. Так, в задаче о теплопередаче для вывода формального уравнения

$$\alpha\nabla^2 T + \frac{G}{\rho C} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

использовались более общие *концепции*, лежащие в основе закона Фурье и первого закона термодинамики. При решении данной одномерной задачи эти законы можно применять непосредственно, вначале рассматривая дифференциальный элемент:

$$dq_{\text{вх}} = -k\,dA\frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow \boxed{dx} \rightarrow dq_{\text{вых}} = -k\,dA\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(-k\,dA\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx.$$

Исходя из энергетического баланса (заметьте, что используется первый закон термодинамики), мы можем записать для этого элемента следующее уравнение:

$$-k\,dA\,\frac{\partial T}{\partial x} = -k\,dA\,\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-k\,dA\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx.$$

Если k и A — постоянные (следует напомнить, что в записанном выше формальном уравнении, считавшемся достаточно общим или основным, параметры полагались постоянными), данное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0.$$

В отличие от формального подхода, когда применяется общее уравнение, полученное в результате некоторого математического вывода, этот второй подход мы будем называть *концептуальным* [1]. Концептуальный подход предпочтительнее, поскольку в этом случае можно более глубоко вникнуть в свою задачу, более полно понять физические законы и принимаемые допущения. Кроме того (и это, по-видимому, наиболее важная причина, почему следует отдавать предпочтение концептуальному подходу), при решении новых задач, при выводе в случае необходимости уравнений, а также при решении таких задач, когда физический принцип применим, а формальное уравнение не подходит, инженер, решающий задачу, оказывается в значительно более выгодном положении. Попытайтесь, например, используя формальное уравнение $\alpha\nabla^2 T + G/\rho C = \partial T/\partial t$, найти распределение температуры в тонкой медной проволоке в том случае, когда теплопередача от ее поверхности происходит в результате *конвекции*. В данном примере вопрос состоит в следующем Основная идея здесь заключается в том, что тепловой поток пропорционален градиенту температуры, а коэффициент пропорциональности зависит от свойств материала. Эта идея применима при рассмотрении дифференциального элемента в любой задаче. Совместно с первым законом термодинамики *при некоторых допущениях* (например, при допущении о постоянстве свойств) ее можно использовать при выводе уравнения $\alpha\nabla^2 T + G/\rho C = \partial T/\partial t$, которое, как мы теперь видим, не является таким уж фундаментальным, как это казалось на первый взгляд.

Аналогичные примеры можно привести из области гидромеханики (использование формального уравнения Навье — Стокса и концептуальное применение второго закона Ньютона при рассмотрении дифференциального элемента жидкости), термодинамики (использование формального векторного уравнения энергии и концептуальное применение баланса энергии), динамики (использование формального уравнения Лагранжа и концептуальное применение закона $F=ma$) и т. д.

Было бы неверно создавать впечатление, что студентам не нужно знать и применять в соответствующих условиях некоторые широко используемые формальные уравнения

[1] Я благодарю своего коллегу проф. Эмери из университета Пардью, предложившего термины «формальный» (formal) и «концептуальный» (conceptual).

общего типа. Уравнение теплопроводности, уравнение энергии, уравнения Навье — Стокса, уравнения Лагранжа и т. п. являются мощными аналитическими инструментами. При изучении технических дисциплин их нужно должным образом изучать и запоминать.

При прохождении этих предметов студенты должны освоить формальный метод применения этих уравнений в конкретных случаях. Тот, кто собирается продолжать свою учебу в аспирантуре или специализироваться в одной из областей техники, должен твердо знать одно или несколько этих формальных уравнений и научиться их применять. Однако такое же или во всяком случае не меньшее внимание следует уделять и концептуальному подходу с тем, чтобы, забыв уравнения Лагранжа, вы могли применить к динамической системе закон $F=ma$, а забыв уравнение теплопроводности, применить при рассмотрении дифференциального элемента закон Фурье и первый закон термодинамики. Кроме того, концептуальный подход *необходим* при решении многих новых задач. Другими словами, студенты должны научиться применять как формальный, так и концептуальный подход. Большинство реальных задач инженерного анализа, возникающих в процессе проектирования, лучше всего решать, используя концептуальный подход. В настоящее время в большинстве учебных заведений ослаблено внимание к этому подходу за счет того, что больше времени отводится для дисциплин, в которых изучаются формальные уравнения. Однако это положение необходимо исправить. В этой главе рассматривается использование физических принципов как на основе формального, так и концептуального подходов.

6.3. Две системы координат: Лагранжа и Эйлера

В последующих разделах кратко рассматриваются основные физические законы, используемые инженерами, и некоторые наиболее общие правила, определения и методы. Прежде чем переходить к их рассмотрению, целесообразно показать, что, применяя физические принципы, можно пользоваться двумя фундаментально различными системами координат. Одна из них называется системой координат Лагранжа. В этой системе начало координат жестко связано с некоторой конкретной материальной частицей (телом, системой). При движении этой частицы перемещается и система координат. Поэтому в системе Лагранжа внимание сосредоточено на определенной материальной частице, за которой ведется наблюдение в процессе ее движения.

Другая система координат называется системой Эйлера. Эта система координат фиксирована в пространстве. В данном случае вместо того, чтобы следить за определенной материальной частицей, внимание сосредоточено на некоторой конкретной точке (или области) пространства. Эта система координат приводит к такому понятию, как «фиксированный объем (среды)» [1].

Нет твердых правил, позволяющих быстро решить, какая система координат подходит наилучшим образом для решения той или иной задачи. Если их правильно использовать, то в обоих случаях получаем одинаково точный ответ. Разумеется, часто бывает проще использовать одну какую-либо систему координат, чем другую. Однако независимо от того, какая система координат выбрана, основной ошибкой студентов инженерных специальностей является неправильное определение или описание «фиксированной системы» или «фиксированного объема», при анализе которых используют физические принципы. В результате неправильного определения (фиксированных системы или объема) эти студенты буквально не представляют, о чем они ведут речь! В статике (поскольку здесь ничто не движется, различия между системами координат Эйлера и Лагранжа не существует) наиболее распространенной ошибкой студентов является неумение изолировать свободное тело. То же самое относится и к динамике. В термодинамике неправильное определение фиксированной системы (или фиксированного объема) является обычной причиной неспособности решить задачу. Таким образом, некоторым из тех, кто «понимает» рассматриваемые физические принципы, не удается правильно использовать их, так как они не удосужились должным образом определить фиксированную систему (или фиксированный объем), для анализа которой эти принципы нужно

---

[1] Здесь для обозначения заданной материальной совокупности используется термин «фиксированная система», а для обозначения заданной области пространства — «фиксированный объем».

применить. Можно сказать, что эта ошибка указывает на непонимание самого принципа, однако, как бы там ни было, все сводится к одному: использование физических принципов необходимо начинать с конкретного определения фиксированной системы или фиксированного объема, рассмотрение которых требует применения этих принципов.

6.4. Пример: закон сохранения массы

В этой главе мы ввели несколько новых понятий: формальный и концептуальный подходы к использованию физических принципов, системы координат Эйлера и Лагранжа, а также изложили некоторые общие соображения о символах. Поскольку закон сохранения массы — принцип, который легко понять, именно его удобно использовать для иллюстрации смысла всех этих новых понятий.

Концептуальный подход — система координат Лагранжа. При использовании системы координат Лагранжа сосредоточивают внимание на конкретной материальной системе, за которой мы наблюдаем в процессе ее движения. При концептуальном подходе можно представить себе движение рассматриваемой материальной системы с жестко связанной с ней системой координат. Принцип сохранения массы состоит в том, что масса определяемой материальной системы постоянна. Если обозначить рассматриваемую массу системы символом M, то концептуальное выражение закона сохранения массы будет иметь вид: $M=\text{const}$ или $dM=0$, или $dM/dt=0$, или $(\partial/\partial t)\int_{\mathcal{V}^\partial}\rho_d\mathcal{V}^\partial$, где $\mathcal{V}^\partial$ — объем области, в которой находится эта материальная система, а t — время.

Концептуальный подход — система координат Эйлера. При использовании системы координат Эйлера внимание концентрируется не на самой материальной системе, а на некоторой области пространства. Эта область может перемещаться. (Она может даже изменять размеры или форму, однако в этом случае ее трудно описать, и такое допущение делается редко.) Используя концептуальный подход, представим себе, что мы наблюдаем за определенной областью пространства (фиксированным объемом), а в это время вещество (работа или тепловая энергия) поступает в эту область, выходит из нее или проходит через нее. Применение в данном случае закона сохранения массы показывает, что поступающая масса за вычетом массы, покидающей эту область, равна приращению массы внутри области. Символически

$$M_{\text{вх}} - M_{\text{вых}} = \triangle M_{\text{внутр}}.$$

Часто этот закон бывает удобно выразить через массовые расходы. Массовый расход потока, поступающего в рассматриваемую область, за вычетом массового расхода потока, покидающего эту область, равен скорости изменения массы в пределах этой области. Символически

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{вх}} - \left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{вых}} = \left(\frac{dM}{dt}\right)_{\text{внутр}},$$

где m обозначает массу, поступающую в рассматриваемую область или покидающую ее, а M — массу, находящуюся в пределах этой области. В векторной форме это уравнение имеет более изящный вид

$$\oint_A \rho\,(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} \rho\, d\mathcal{V},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный нормально к поверхности, ограничивающей рассматриваемую область, и ориентированный наружу, ρ — локальная плотность, $\mathbf{V}$ — скорость, A — площадь поверхности, ограничивающей рассматриваемую область, $\mathcal{V}$ — ее объем и t — время.

Если в задаче используется концептуальный подход, полученные выше уравнения фактически выводятся заново с учетом частных условий задачи, и вывод начинается с рассмотрения самого физического принципа. При формальном подходе исходными являются уже выведенные общие уравнения, которые дедуктивно применяются в условиях конкретной задачи.

Формальный подход — система координат Лагранжа. Получены следующие уравнения: $M = \text{const}$, или $dM = 0$, или $dM/dt = 0$, или $(\partial/\partial t)\int\rho\, d\mathcal{V} = 0$. При использовании их для решения задачи обычно соответствующая формула совместно с другими уравнениями, описывающими заданную ситуацию, лишь преобразуется математически. Если в конкретной задаче нельзя произвести какие-либо упрощения, то нет необходимости ни в дальнейших математических выкладках, ни в анализе инженерного порядка. Если, например, система несжимаема, то ρ — постоянная и уравнение можно привести к виду: $\mathcal{V}=\mathrm{const}$, или $d\mathcal{V}=0$, или $d\mathcal{V}/dt=0$. Это просто означает, что объем несжимаемой системы постоянен, что очевидно также и при концептуальном подходе.

Формальный подход — система координат Эйлера. Уравнение для фиксированного объема, выраженное через интенсивности потоков, имеет вид

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{вх}}-\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{вых}}=\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\text{внутр}},$$

или в векторной форме

$$-\oint_A \rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA=(\partial/\partial t)\int_{\mathcal{V}}\rho\,d\mathcal{V}.$$

При формальном подходе к задаче эти уравнения используются в том виде, как они записаны, при этом соответствующие члены исключаются или упрощаются. Случай стационарного потока означает, что внутри области отсутствуют изменения во времени, поэтому $(\partial/\partial t)\int_{\mathcal{V}}\rho\,d\mathcal{V}=0$ и $(dM/dt)_{\text{внутр}}=0$. В этом случае данные уравнения принимают вид

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{вх}}=\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{вых}}$$

и

$$\oint_A \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA=0.$$

При концептуальном подходе в случае стационарного потока инженер начнет с рассмотрения физического принципа и заметит, что поступающая масса должна быть равна массе, покидающей рассматриваемую область, или, если рассматривается массовый расход, $(dm/dt)_{\text{вх}}=(dm/dt)_{\text{вых}}$. В векторной форме это уравнение имеет вид

$$\oint_A \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA=0.$$

В данном простом случае, когда рассматривается закон сохранения массы, формальный и концептуальный подходы в одинаковой степени просты и продуктивны. Однако существуют задачи, когда применение того или иного подхода дает значительные преимущества. Студенты должны уметь без труда применять оба эти метода.

6.5. Законы движения Ньютона — система координат Лагранжа

Законы движения Ньютона часто подразделяют на первый, второй и третий. В действительности же в таком разделении законов нет необходимости, поскольку первый и третий законы являются лишь частными случаями известного нам второго закона $F=ma$. Первый закон гласит, что если нет внешних сил, то ускорение отсутствует и, следовательно, скорость тела не меняется. Третий закон гласит, что если нет ускорения, то внешние силы, действующие на тело, находятся в равновесии. Часто этот закон формулируется как «действие равно противодействию».

Третий закон лежит в основе области анализа, называемой статикой. Принцип, лежащий в основе статики, довольно прост. Если у студентов возникают некоторые трудности при изучении статики, то они связаны с неумением записать уравнения

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = \sum \tau = 0.$$

Эти трудности вызываются неумением изолировать свободные тела, к которым применимы записанные выше уравнения. Это неумение свидетельствует о недостаточном понимании вопроса, поскольку этот принцип имеет смысл лишь в том случае, если его применяют к изолированному телу. Тот, кто не умеет выделять (изолировать) свободные тела, не вправе сказать, что он понимает статику.

Третий закон Ньютона совместно с такими понятиями, как напряжение и деформация, а также ограничениями, налагаемыми требованием геометрической совместимости, и уравнениями, характеризующими само вещество (например, закон Гука), лежит, кроме того, в основе теории упругости. Когда можно принять определенные допущения, например допущение о том, что плоское поперечное сечение балки при рассматриваемых нагрузках остается плоским, теория упругости упрощается и мы имеем дело с предметом, называемым «сопротивлением материалов». Однако в основе обоих этих предметов лежит понятие о статическом равновесии сил.

Концептуальное применение второго закона Ньютона значительно сложнее, чем первого и третьего законов.

В этой книге мы пренебрегаем эффектами относительности. Однако нельзя не учитывать всех усложняющих факторов, которые связаны с применением закона $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$. Прежде всего, это уравнение нужно применять лишь в случае изолированных свободных тел с постоянной массой. Как и в статике, многие трудности, возникающие при использовании закона $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$, проистекают не от незнания уравнения, а от непонимания самого принципа. Записав формулу $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$, мы еще не вскрыли общий смысл этого физического принципа. Этот закон должен применяться к изолированным системам с постоянной массой. Здесь $\mathbf{F}$ обозначает сумму внешних сил. Что еще необходимо иметь в виду?

Важно также иметь в виду и то обстоятельство, что этот закон связывает между собой направленные величины. В векторной форме это очевидно, так как каждый вектор характеризуется определенным направлением:

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}.$$

В скалярной форме мы имеем

$$F_x=ma_x,$$
$$F_y=ma_y,$$
$$F_z=ma_z.$$

В записанных выше уравнениях считается само собой разумеющимся, что все точки постоянной массы m имеют одну и ту же скорость. В том случае, когда это условие не выполняется, можно принять допущение о системе с сосредоточенными параметрами и рассматривать движение центра масс. Однако это вносит значительную погрешность в том случае, когда рассматриваемые перемещения и размер системы имеют один и тот же порядок. Кроме того, допущение о сосредоточенных параметрах неприемлемо для жидкостей. В этих случаях распределенный характер системы можно учесть путем интегрирования, начиная с

$$d\mathbf{F}=dm\cdot\mathbf{a},$$

или

$$d\mathbf{F}=dm\frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Применяя цепное правило дифференцирования, получаем

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{V}}{dt}=V_x\frac{d\mathbf{V}}{dx}+V_y\frac{d\mathbf{V}}{dy}+V_z\frac{d\mathbf{V}}{dz}+\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{D\mathbf{V}}{Dt},$$

где D/Dt называется субстанциональной (полной) производной. Таким образом,

$$d\mathbf{F}=\frac{D}{Dt}\left(dm\cdot\mathbf{V}\right).$$

Интегрируя, получаем

$$\mathbf{F}=\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}}\rho\mathbf{V}\,d\mathcal{V},$$

где $\mathcal{V}$ — объем, а ρ — плотность. В скалярной форме записанные выше уравнения (по координате x) имеют вид

$$dF_x=dma_x,$$

$$dF_x=dm\frac{dV_x}{dt},$$

$$a_x=V_x\frac{dV_x}{dx}+V_y\frac{dV_x}{dy}+V_z\frac{dV_x}{dz}+\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{DV_x}{Dt},$$

$$dF_x=\frac{D}{Dt}dmV_x,$$

$$F_x=\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}}\rho V_x\,d\mathcal{V}.$$

Наконец, что наиболее важно, необходимо помнить, что этот закон применим только при использовании так называемой инерциальной или ньютоновой системы координат. Это означает, что ускорение **a** должно быть выражено в системе координат, которая либо является неподвижной, либо движется с постоянной скоростью. Для большинства технических приложений такой инерциальной системой координат может служить система, связанная с Землей.

Когда нельзя пренебречь перемещением Земли, происходящим за время исследования, систему координат, связанную с Землей, уже нельзя рассматривать как инерциальную. Примером могут служить задачи, в которых рассматривается движение ракет и спутников. В этих случаях систему координат необходимо связывать с Солнцем или так называемыми неподвижными звездами и ускорения нужно выражать относительно этих тел.

Часто бывает необходимо рассматривать тела в неинерциальной системе координат xyz, которая движется относительно инерциальной системы координат XYZ. Рассматривая кинематику, получаем следующее уравнение, связывающее ускорение относительно неинерциальной системы координат с ускорением в инерциальной системе:

$$\mathbf{a}_{XYZ} = \mathbf{a}_{xyz} + \ddot{\mathbf{R}} + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат системы XYZ к началу координат системы xyz, $\mathbf{V}$ — скорость относительно системы координат xyz, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки в системе координат xyz, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость этой точки в системе координат xyz. В скалярной форме полученное выше уравнение имеет вид

$$(a_x)_{XYZ} = (a_x)_{xyz} + \ddot{R}_x + 2(\omega_y V_z - \omega_z V_y) + (\omega_y V_z - \omega_z V_y) + \\ + \omega_x \omega r \cos\theta_{\omega r} - \omega^2 r_x,$$

где индексы относятся к составляющим определенных выше различных параметров по осям x, y и z, ω — модуль угловой скорости, а $\theta_{\omega r}$ — угол между ω и r. Студенты должны знать, что член $2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}$ или $2(\omega_y V_z - \omega_z V_y)$ выражает так называемое кориолисово ускорение.

Записанные выше общие уравнения можно применять формально, однако необходимо действовать осмотрительно. Только в этом случае можно будет гарантировать правильное использование символов и выполнение соответствующих правил. При концептуальном подходе можно использовать закон $F=ma$, а необходимые выражения для ускорения выводить для инерциальной системы координат, отвечающей конкретным условиям.

Одна из типичных ошибок, допускаемых студентами, настолько распространена, что она заслуживает особого упоминания. Для системы с переменной массой, какой является ракета, будет неправильно считать, что

$$F = \left(\frac{d}{dt}\right) mV = m\frac{dV}{dt} + V\frac{dm}{dt}.$$

Возможно, с точки зрения математики все правильно, однако физика явления выражена неверно. Этот закон применим к системам с постоянной массой. Системы с переменной массой лучше всего изучать, используя систему координат Эйлера, которая рассматривается ниже. Существо вопроса состоит в том, что нельзя без разбора применять закон $F=ma$ ко всему, что движется. Нужно понимать физический принцип, стоящий за уравнением.

Второй закон Ньютона часто удобно применять как уравнение моментов. Знакомый нам результат $\tau=I\alpha$ аналогичен уравнению $F=ma$. Разумеется, за уравнением $\tau=I\alpha$ точно так же, как и за уравнением $F=ma$, стоят положения, не сформулированные словесно, причем основным из них является необходимость использовать инерциальную систему координат. Второй закон для вращательного движения формально можно получить в следующем виде:

$$d\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}\times d\mathbf{F}=\mathbf{r}\times\frac{D}{Dt}\left(dm\cdot\mathbf{V}\right)=\frac{D}{Dt}\left(\mathbf{r}\times dm\cdot\mathbf{V}\right)=\frac{d\mathbf{H}_{xyz}}{dt},$$

где $\mathbf{H}_{xyz}$ — момент количества движения в инерциальной системе координат. Интегрируя по конечному объему, получаем

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{V}\right)\rho\,d\mathcal{V}.$$

Для твердого тела, вращающегося в инерциальной системе координат, из этого уравнения вытекают три уравнения следующего вида:

$$\sum\tau_x=I_{xx}\omega-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z,$$

где

$$I_{xx}=\int_{\mathcal{V}}\rho\,(y^2+z^2)\,d\mathcal{V},$$

$$I_{xy}=\int_{\mathcal{V}}\rho xy\,d\mathcal{V}.$$

Таким образом, для простейшей системы, вращающейся вокруг одной оси, получаем

$$\sum\tau=I_{xx}\dot{\omega}_x=I_{xx}\alpha_x.$$

Этот результат можно получить путем непосредственного *концептуального* применения к простой вращающейся системе закона $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$. Как можно видеть, получение этого результата путем упрощения полного формального векторного уравнения ненадежно. В то же время студенты убедятся и в том, что, хотя непосредственное концептуальное применение закона $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ возможно и в более сложных случаях, оно является весьма мучительным процессом. По этой причине здесь подчеркивается, что студенты должны глубоко изучать как формальный, так и концептуальный подходы, с тем чтобы хорошо владеть *обоими* методами и уметь выбирать тот из них, который является наилучшим для рассматриваемой задачи.

6.6. Масса, количество движения, энергия и энтропия. Системы координат Лагранжа и Эйлера. Формальный подход

В табл. 6.1 и 6.2 дается сводка уравнений, где символически записаны закон сохранения массы, второй закон Ньютона, первый и второй законы термодинамики. Как всегда, формальное применение этих уравнений требует понимания принципов, лежащих в их основе, и умения связать символы с физической реальностью. Сами уравнения являются лишь краткими условными обозначениями. Многие подразумеваемые условия остаются незаписанными, что было показано при рассмотрении второго закона Ньютона в предыдущем разделе.

Уравнения для фиксированной системы относительно просты. Единственное, что здесь следует добавить: важно начинать с правильного определения системы, при рассмотрении которой должен использоваться тот или иной физический принцип.

Уравнения для фиксированного объема также нетрудно применять, когда фиксированный объем постоянен. Однако, как уже указывалось ранее, физические принципы можно применять и при анализе движущихся областей, которые правильно определены. Обычно допускают, что размер или объем области не меняется, а область лишь перемещается в пространстве. Поэтому в произведении $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ всегда $\mathbf{V}$ обозначает скорость, а $\dot{m}$ — расход массы *относительно* фиксированного объема. Если движение области относительно инерциальной системы координат происходит с постоянной скоростью, то сам фиксированный объем и определяет инерциальную систему координат. В данном случае величина $\mathbf{V}$ в произведении $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ и величина $\dot{m}$ по-прежнему рассматриваются относительно фиксированного объема, однако другие

Таблица 6.1

Физический принцип	Уравнение для фиксированной системы	Уравнение для фиксированного объема
Закон сохранения массы	$0=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho\,d\mathcal{V}$	$0=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho\,d\mathcal{V}+\oint_A\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA$
Первый закон термодинамики	$d'Q-d'W=dE$ $\dot{Q}-W=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho e\,d\mathcal{V}$	$\dot{Q}-\dot{W}=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho e\,d\mathcal{V}+\oint_A\rho(e+pv)\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA$
Первый закон Ньютона	$F=\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}}\rho\mathbf{V}\,d\mathcal{V}$	$\mathbf{F}=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho\mathbf{V}\,d\mathcal{V}+\oint\rho\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA$
Второй закон термодинамики	$\frac{d'Q}{T}\leqslant ds$ $\oint_A\frac{\dot{Q}}{T}\,dA\leqslant\int_{\mathcal{V}}\rho s\,d\mathcal{V}$	$\oint_A\frac{Q}{T}\,dA\leqslant\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho s\,d\mathcal{V}+\oint\rho s\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA$

Таблица 6.2

Физический принцип	Уравнение для фиксированной системы	Уравнение для фиксированного объема
Закон сохранения массы	$0 = dM$ $0 = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}$	$0 = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} + \oint_{A_{\text{вых}}} \dot{m} \, dA_{\text{вых}} - \oint_{A_{\text{вх}}} \dot{m} \, dA_{\text{вх}}$
Первый закон термодинамики	$d'Q - d'W = dE$ $Q - W = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho e \, d\mathcal{V}$	$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho e \, d\mathcal{V} + \oint_{A_{\text{вых}}} (e + pv) \, \dot{m} \, dA_{\text{вых}} - \oint_{A_{\text{вх}}} (e + pv) \, \dot{m} \, dA_{\text{вх}}$
Второй закон Ньютона	$F_x = \frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} \rho V_x \, d\mathcal{V}$	$F_x = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho V_x \, d\mathcal{V} + \oint_{A_{\text{вых}}} \rho V_x \dot{m} \, dA_{\text{вых}} - \oint_{A_{\text{вх}}} \rho V_x \dot{m} \, dA_{\text{вх}}$
Второй закон термодинамики	$\frac{d'Q}{T} \leqslant ds$ $\frac{Q}{T} \, dA \leqslant \int_{\mathcal{V}} \rho s \, d\mathcal{V}$	$\frac{Q}{T} \, dA = \int_{\mathcal{V}} \rho s \, d\mathcal{V} + \oint_{A_{\text{вых}}} s\dot{m} \, dA_{\text{вых}} - \oint_{A_{\text{вх}}} s\dot{m} \, dA_{\text{вх}}$

составляющие $\mathbf{V}$ могут рассматриваться как относительно фиксированного объема, так и относительно любой другой инерциальной системы координат. Если фиксированный объем движется с ускорением, и, следовательно, связанная с ним система координат не является инерциальной системой отсчета, то для выполнения условий применения закона Ньютона отдельные значения $\mathbf{V}$ и V_x *должны* определяться относительно некоторой неинерциальной системы координат. Впрочем, как всегда, величина $\mathbf{V}$ в произведении $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ и величина $\dot{m}$ определяются относительно фиксированного объема, поскольку их назначение состоит в том, чтобы описать поток массы, поступающий в фиксированный объем и выходящий из него.

6.7. Масса, количество движения, энергия и энтропия. Концептуальный подход

Существуют формальные математические методы [3, 4], позволяющие превратить уравнения для фиксированной системы (уравнения Лагранжа) в уравнения для фиксированного объема (уравнения Эйлера), приведенные в табл. 6.1 и 6.2. Для студентов технических специальностей важно уметь выполнять такого рода формальные преобразования. Однако, когда придет время использовать физические принципы, студент должен понимать физический смысл каждого символа, входящего в уравнение. Кроме того, часто принципы могут использоваться концептуально без специального обращения к формально выведенному уравнению.

В разд. 6.4 указывалось, что концептуальное использование закона сохранения массы применительно к некоторой области пространства показывает, что скорость поступления массы минус скорость истечения массы равна скорости изменения массы внутри этой области. Это словесное выражение можно записать как

$$0=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho\, d\mathcal{V}+\oint\rho\,(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA,$$

или

$$0=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho\, d\mathcal{V}+\oint_{A_{\text{вых}}}\dot{m}\,dA_{\text{вых}}-\oint_{A_{\text{вх}}}\dot{m}\,dA_{\text{вх}}.$$

Применение закона сохранения энергии при концептуальном подходе дает аналогичные результаты. Скорость поступления энергии в некоторую область минус скорость ухода энергии из этой области равна скорости изменения энергии внутри области. Необходимо учитывать энергию в любой форме: тепловую энергию, работу, внутреннюю, кинетическую, потенциальную энергии и т. д. Используя обычные обозначения термодинамики и соблюдая правило знаков, можно записать

$$\dot{Q}+\int_{A_{\text{вх}}} me\,dA_{\text{вх}}-\dot{W}_{\text{общ}}-\oint_{A_{\text{вых}}} me\,dA_{\text{вых}}=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho e\,d\mathcal{V},$$

где e — полная энергия $(u+\frac{1}{2}V^2+gz)$ на единицу массы вещества; $\dot{W}_{\text{общ}}$ — общий поток работы, выходящий из области, обычно эта величина делится на две составляющие:

$$\dot{W}_{\text{общ}}=W_x+\text{Поток работы}=$$
$$=\dot{W}_x+\oint_{A_{\text{вых}}} pvm\,dA_{\text{вых}}-\oint_{A_{\text{вх}}} pv\dot{m}\,dA_{\text{вх}}.$$

Что включает в себя $\dot{W}_x$, читатель узнает в разд. 6.8. Рассматривая совместно эти уравнения и преобразуя их к знакомому нам виду, получаем

$$\dot{Q}-\dot{W}_x=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho e\,d\mathcal{V}+\int_{A_{\text{вых}}}(e+pv)\,m\,dA_{\text{вых}}-$$
$$-\oint_{A_{\text{вх}}}(e+pv)\,\dot{m}\,dA_{\text{вх}}.$$

Используя векторную форму записи, имеем

$$Q-\dot{W}_x=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho e\,d\mathcal{V}+\oint_{A}\rho\,(e+pv)\,(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA.$$

Здесь $e+pv$ — известное нам выражение $h+\frac{1}{2}V^2+gz$, где h — энтальпия, определяемая как $u+pv$. Таким образом, при концептуальном использовании закона сохранения энергии получаем то же самое уравнение, что и при формальном преобразовании. При решении задач, разумеется, можно использовать как формальное уравнение, так и непосредственно применять сам принцип.

Концептуальное применение второго закона Ньютона при рассмотрении некоторой области пространства также не представляет труда. Идея состоит в следующем. Внешние силы, действующие на границе области, увеличивают или уменьшают количество движения внутри области в соответствии с законом $F=(d/dt)mV$. Помимо этого, разумеется, существует поток количества движения, направленный внутрь области и из нее и, кроме того, может изменяться количество движения внутри области. Поскольку физическим принципом является второй закон Ньютона, необходимо учесть все известные особенности применения этого закона: закон связывает векторные величины и применим только в инерциальной системе координат. Учитывая сказанное, этот принцип можно выразить словами. Внешние силы плюс поток количества движения, направленного внутрь области, минус поток количества движения, направленного из этой области наружу, равны скорости изменения количества движения внутри области. Символически для одномерного случая это можно записать так:

$$F_x+\int_{A_{\text{вх}}} mV_x\,dA_{\text{вх}}-\int_{A_{\text{вых}}} mV_x\,dA_{\text{вых}}=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho V_x\,d\mathcal{V},$$

и в векторной форме

$$\mathbf{F}=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho\mathbf{V}\,d\mathcal{V}+\oint_A\rho\,(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{V}\,dA.$$

Здесь величины $\mathbf{V}$ и V_x имеют тот же смысл, что и в предыдущем разделе. Студенты должны знать, какие скорости V относятся к фиксированному объему, а какие — к инерциальной системе и почему.

В такой же мере возможно и концептуальное применение второго закона термодинамики, если иметь в виду, что он не является законом сохранения. Уравнение для системы показывает, что энтропия адиабатной системы возрастает и что для неадиабатной системы

$$\frac{d'Q}{T}\leqslant ds.$$

Аналогично энтропия адиабатной области должна возрастать или превышать значение $d'q/T$, определенное на ее границе. Этот случай, однако, несколько сложнее вследствие наличия потока массы, который изменяет энтропию. Величину $d'q/T$ удобно рассматривать как своего рода «поток». Имея в виду, что должно получиться неравенство, соотношение можно выразить следующим образом: $d'q/T$ плюс поток энтропии, поступающей в рассматриваемую область, минус поток энтропии, выходящей из этой области, меньше скорости изменения энтропии внутри области. Символически это соотношение выражается следующим образом:

$$\oint \frac{\dot{Q}}{T}\,dA+\oint_{A_{\text{вх}}} s\dot{m}\,dA_{\text{вх}}-\oint_{A_{\text{вых}}} s\dot{m}\,dA_{\text{вых}}<\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho s\,d\mathcal{V}.$$

В векторной форме

$$\oint \frac{\dot{Q}}{T}\,dA<\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho s\,d\mathcal{V}+\oint_A \rho s(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA.$$

В табл. 6.3 дается сводка уравнений в векторной форме, которые описывают физические принципы, рассмотренные в этом разделе. Тот, кто не пожалеет времени и сил для решения нескольких задач на основе как формального, так и концептуального использования этих принципов, будет щедро вознагражден, так как это поможет ему глубже разобраться в сути вопроса.

Таблица 6.3

Члены, описывающие входящий поток		Члены, описывающие запасенное количество	Члены, описывающие выходящий поток
0	$=$	$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho\,d\mathcal{V}$	$+\oint_A \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA$
$\dot{Q}-\dot{W}_x$	$=$	$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho e\,d\mathcal{V}$	$+\oint_A (e+pv)\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dA$
$\mathbf{F}$	$=$	$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho\mathbf{V}\,d\mathcal{V}$	$+\oint_A (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA$
$\frac{\dot{Q}}{T}$	$<$	$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho s\,d\mathcal{V}$	$+\oint_A s\rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA$

6.8. Работа

Механическая работа — знакомый нам процесс, который на первых порах часто используется для объяснения общего понятия работы. Результатом этого является обычное пренебрежение другими важными видами работы и невнимание к ним. Во многих областях очень важную роль играет работа, производимая при перемещении в электрическом и магнитном полях. Такой эффект, как поверхностное натяжение (которое становится существенным в слабых гравитационных полях), а также термоэлектрические и магнитодинамические явления требуют рассмотрения и других форм работы. Следует подчеркнуть, что величина W в выражении первого закона термодинамики, записанном в виде уравнения для фиксированной системы, и величина $\dot{W}_x$ в выражении того же закона, записанном в виде уравнения для фиксированного объема, включают все виды работы, а не только механическую работу. Наша цель состоит лишь в том, чтобы обратить внимание студентов на эти виды работы. В конце этой главы в списке рекомендуемой литературы названы книги по термодинамике, в которых этот вопрос рассматривается более подробно, с примерами и объяснениями.

6.9. Теплопередача

Теплопроводность. Как указывалось в примере, рассмотренном в начале этой главы, основной принцип теплообмена за счет теплопроводности формулируется так: тепловой поток пропорционален градиенту температуры и площади; коэффициент пропорциональности зависит от материала и часто от температуры. Этот принцип символически обычно выражается в таком виде:

$$d'q_x = -k\,dA_x \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Кроме того, как указывалось ранее, этот принцип совместно с первым законом термодинамики используется для вывода формального уравнения теплопроводности:

$$\nabla^2 T + \frac{G}{\rho C} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Важно уметь использовать этот принцип как при формальном, так и концептуальном подходе.

Конвекция. Основной принцип теплообмена за счет конвекции формулируется так: тепловой поток пропорционален разности между температурой стенки и средней температурой жидкости, коэффициент пропорциональности называется «коэффициентом теплопередачи». Символически этот принцип выражается в таком виде:

$$d'q = h\,(T_{\text{стенка}} - T_{\text{жидк}})\,dA.$$

Таким образом, определение интенсивности теплообмена конвекцией сводится к вычислению коэффициента h. Оказывается, что h зависит от очень многих параметров, однако основными факторами являются свойства жидкости, характер потока (ламинарный или турбулентный) и геометрия. Величину h можно определить аналитическим путем, например, в случаях ламинарного потока, однако в общем случае все настолько сложно, что необходимо применять эмпирические методы. Найти h по экспериментальным результатам почти невозможно без анализа размерности. Рассмотрим, например, известное нам уравнение для коэффициента теплопередачи в случае турбулентного потока внутри трубы:

$$\mathrm{Nu}_D = 0{,}023\,(\mathrm{Re}_D)^{0,8}\,(\mathrm{Pr})^{0,4},$$

или

$$h = \frac{k}{D}\cdot 0{,}023\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)^{0,8}\left(\frac{C_p\mu}{k}\right)^{0,4}.$$

Это уравнение — эмпирическая аппроксимация, включающая три переменных: Nu_D, Re_D и Pr. Без предварительного преобразования с помощью анализа размерностей это уравнение будет содержать семь переменных и найти h было бы исключительно трудно. В литературе по теплотехнике приводятся и другие выраженные через безразмерные комплексы соотношения для h, отвечающие тепловым потокам в различных условиях. В большинстве случаев требуется определить свойства жидкости при температуре, средней между температурой стенки и температурой в объеме жидкости.

Излучение. Теплообмен за счет излучения подчиняется закону Стефана — Больцмана:

$$d'q_{12} = F_{12}\,dA_1\,\sigma\,(T_1^4 - T_2^4),$$

где σ — универсальная постоянная, равная $5{,}675\cdot 10^{-12}$ *вт*$\cdot$*см*$^{-2}\cdot$*град*$^{-4}$, а F_{12}—множитель, учитывающий геометрию и излучательные свойства вещества. Как в большинстве задач о теплообмене за счет конвекции все сводится к определению h, так и в большинстве задач о теплообмене за счет излучения все сводится к определению F. Детали, связанные с определением этих коэффициентов, как экспериментально, так и аналитически, рассматриваются в курсах лекций по теплотехнике.

6.10. Принципы анализа электрической цепи

Для анализа электрических цепей применимы физические принципы, называемые первым и вторым правилом Кирхгофа. Первое правило Кирхгофа гласит: сумма всех токов, притекающих в точку разветвления проводников,

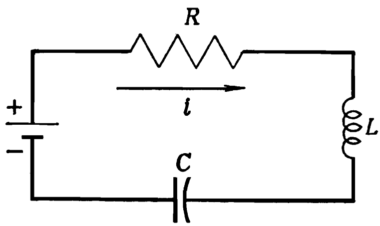


Рис. 6.1.

равна нулю. Второе правило Кирхгофа гласит: сумма падений напряжения вдоль замкнутого контура равна нулю. В случае применения этих законов требуется тщательно соблюдать правило знаков.

Второе правило Кирхгофа требует рассматривать падение напряжения на таких электрических компонентах, как резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности. Падение напряжения на резисторе в направлении тока равно iR, где R — сопротивление резистора в омах. Падение напряжения на конденсаторе в направлении тока равно

$$\Delta V = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt.$$

где C — емкость, а q — заряд. Падение напряжения на катушке индуктивности равно

$$\Delta V = L\frac{di}{dt},$$

где L — индуктивность. Так, применяя к цепи, изображенной на рис. 6.1, второе правило Кирхгофа, получаем

$$-E+Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0.$$

Если это выражение продифференцировать и учесть, что $dq/dt=i$, то его можно записать как

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0.$$

6.11. Замечания о выводе дифференциальных уравнений

В последующих примерах выводится несколько дифференциальных уравнений, описывающих механические, теплотехнические и электротехнические системы. Несколько других уравнений было выведено ранее в гл. 4 и в данной главе. Студентам следует обратить особое внимание на вывод этих уравнений, выполненный при концептуальном подходе. Используя формальный подход, авторы учебников и профессора выводят дифференциальные уравнения раз и навсегда. Большей частью студенты просто наблюдают за их выводом, и хотя они приобретают затем большую практику в использовании результатов, сами они выводят уравнения очень и очень редко. Поскольку люди усваивают главным образом то, что они делают сами, результатом является недостаточная уверенность в себе и неумение самостоятельно выводить дифференциальные уравнения.

Для вывода дифференциального уравнения необходимо понимать принцип дифференциального изменения. Этот шаг кажется очень трудным до тех пор, пока он не будет успешно проделан несколько раз. «Возьмем элементарный (дифференциальный) объем» — это выражение широко используется во многих областях, например в теплотехнике и гидромеханике. «Рассмотрим дифференциальное приращение времени» — этим выражением начинается вывод уравнения механики. Однако какие-либо подходящие правила отсутствуют, и этот процесс невозможно обобщить. С этой целью рассмотрим несколько примеров (см. также [1]). Умение выводить дифференциальные уравнения и концептуально применять физические принципы — важные качества инженера. Обычно студентам нужно больше упражняться в этом. Не допускайте, чтобы авторы учебников и преподаватели делали за вас всю работу и, следовательно, чтобы только на этом строилось все ваше обучение.

Разумеется, получить дифференциальное уравнение при решении задачи — это только половина дела. Прежде чем можно будет найти решение уравнения, необходимо задать граничные или начальные условия. Это не всегда так просто, как кажется, и при задании граничных и начальных условий студенты довольно часто допускают различного рода ошибки. В приводимых далее примерах студентам предоставляется возможность вывести уравнения и задать граничные условия. Мудро поступит тот, кто воспользуется этими возможностями и немного поупражняется в приобретении этих важных навыков.

6.12. Пример: электрическая цепь

Постановка задачи. Для самонастраивающейся (автоматической) системы управления сложным производственным процессом необходима электрическая цепь, в которой при подаче на вход синусоидального напряжения частотой

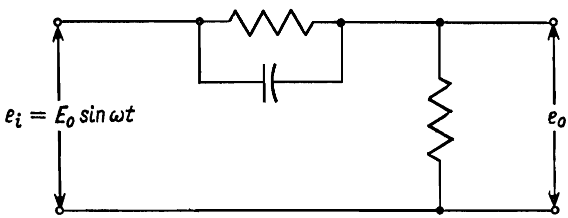


Рис. 6.2.

150 *гц* напряжение на выходе будет запаздывать по фазе на 30° относительно входного. Была предложена цепь, изображенная на рис. 6.2. Будет ли эта цепь работать, а если будет, то каковы должны быть параметры электрических компонентов?

Определение задачи. Не представляет труда дать конкретное определение задачи. Для этого необходимо перейти от словесной формулировки к более точным символическим обозначениям. Резисторы и конденсаторы обозначаются так, как это показано на рис. 6.3. На рисунке показано также входное напряжение в виде синусоидальной функции. Таким образом, задача состоит в том, чтобы выразить e_0 через E_0, ω, R_1, C и R_2. После того как это выполнено, нужно изучить результат. Цель этого изучения — убедиться, что можно подобрать значения R_1, C и R_2, дающие сдвиг фазы e_0 относительно e_i на 30°.

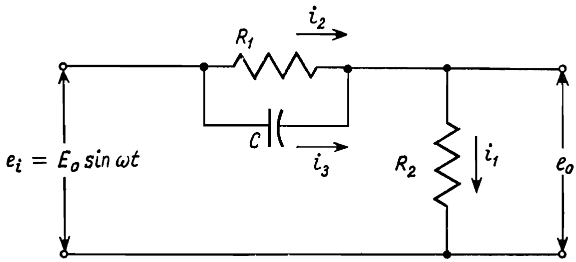


Рис. 6.3.

Построение модели. В данном случае при определении задачи модель по существу была построена. Рассматриваются сосредоточенные параметры. Сопротивлением соединительных проводов, паяных соединений и т. д. пренебрегаем. Предполагается, что электрические свойства цепи постоянны.

Прежде чем продолжать чтение, попытайтесь записать уравнения на основе законов, определяющих работу цепи.

Использование физических принципов. Принципами, определяющими работу цепи, являются первое и второе правила Кирхгофа. Вначале необходимо определить токи в различных проводниках цепи. Это показано на рис. 6.3. Затем, пренебрегая током, поступающим на выход цепи, и используя первое правило Кирхгофа, получаем

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

Второе правило Кирхгофа дает три уравнения, так как имеются три контура:

$$e_i = i_2 R_1 + i_1 R_2,$$
$$e_i = \frac{1}{C}\int i_3 dt + i_1 R_2,$$
$$e_0 = i_1 R_2.$$

Кроме того,

$$e_i = E_0 \sin \omega t.$$

Эта система уравнений описывает процессы в цепи. Необходимо решить эти уравнения и найти напряжение e_0, выраженное через R_2, R_1, C и время.

Прежде чем продолжать чтение, попытайтесь с помощью полученных выше уравнений самостоятельно составить дифференциальное уравнение для i_1.

Вычисления. Если можно определить i_1, то, поскольку $e_0 = i_1 R_2$, легко можно найти e_0 и сравнить с e_i. Дифференцируя уравнение для второго контура, получаем

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{i_3}{C} + R_2 \frac{di_1}{dt}.$$

Теперь, используя тот факт, что $i_1 = i_2 + i_3$, можно исключить i_3, а затем, используя выражение $e_i = i_2 R_1 + i_1 R_2$, исключить и i_2. В результате получаем

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{i_1}{C} - \frac{1}{R_1 C}(e_i - i_1 R_2) + R_2 \frac{di_1}{dt}.$$

Заметим, что $e_i = E_i \sin \omega t$ и, следовательно,

$$\frac{de_i}{dt} = E_i \omega \cos \omega t.$$

Это выражение можно переписать как

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_1 = \frac{E_i \omega}{R_2} \cos \omega t - \frac{E_i}{R_1 R_2 C} \sin \omega t.$$

Прежде чем продолжать чтение, попытайтесь самостоятельно решить это уравнение.

Если пренебречь той частью решения, которая характеризует неустановившийся режим, то решение примет вид:

$$i_1 = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

где

$$A = \frac{E\omega}{R_1 R_2 C} \frac{1 + R_1 C a}{\omega^2 + a^2},$$

$$B = \frac{E R_1 C \omega^2 - aE}{R_1 R_2 C (\omega^2 + a^2)},$$

$$a = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}.$$

Переписывая выражение для тока i_1 как

$$i_1 = \sin\varphi \cos\omega t + \cos\varphi \sin\omega t,$$

находим

$$\sin\varphi = \frac{E\omega(1+R_1Ca)}{R_1R_2C(\omega^2+a^2)},$$

$$\cos\varphi = \frac{ER_1C\omega^2 - aE}{R_1R_2C(\omega^2+a^2)}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{E\omega(1+R_1Ca)}{ER_1C\omega^2 - aE} = \frac{A}{B}.$$

Из тригонометрии известно, что приведенное выше выражение для тока можно записать по-другому:

$$i_1 = \cos(\omega t - \varphi).$$

Поскольку $e_0 = i_1R_2$, опережающий сдвиг фазы должен быть равен 30° и, следовательно, R_1, R_2 и C должны быть таковы, чтобы

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{A}{B} = \frac{E\omega(1+R_1Ca)}{ER_1C\omega^2 - aE}.$$

После упрощения получаем

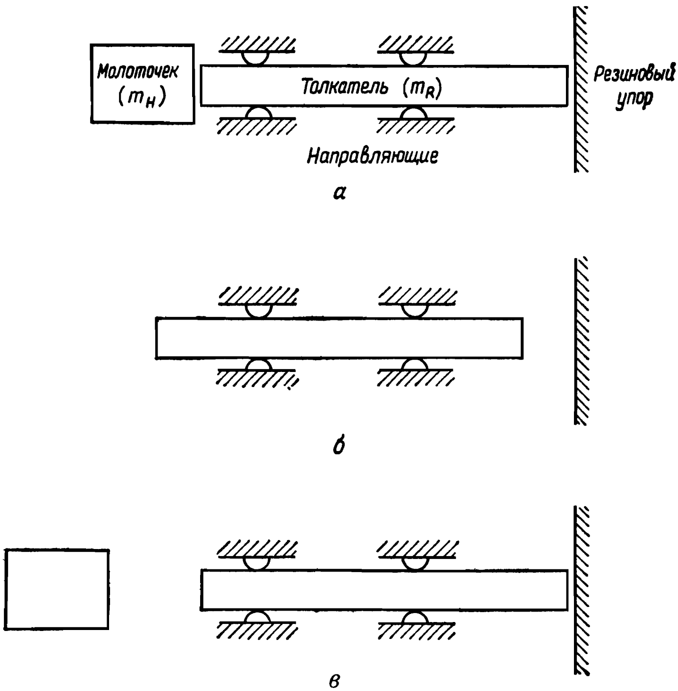
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\omega R_1C(2R_2+R_1)}{\omega^2R_1^2R_2C + R_1 - R_2}.$$

Таким образом мы приходим к выводу, что предложенная цепь выполнит необходимый сдвиг фазы, если выбранные резисторы и конденсаторы будут удовлетворять записанному выше уравнению для напряжения e_0, опережающего e_i по фазе на 30°. Читателю предлагается самостоятельно составить отчет о проделанной работе.

6.13. Пример: неисправный механизм возврата

Постановка задачи. В одном быстродействующем устройстве циклического действия толкатель после выполнения операции ударом молоточка возвращается в исходное положение (рис. 6.4, *а*). И молоточек и толкатель по существу являются плавающими, но их перемещение происходит лишь по прямой, совпадающей с осью толкателя.

Весь этот механизм успешно работал, однако после недавней переделки молоточка с целью его облегчения обнаружилось, что в исходное положение возвращается только толкатель (рис. 6.4, *б* и *в*).



Р и с. 6.4. Толкатель и молоточек в исходном положении (*а*). Неподвижный толкатель после выполнения операции ожидает удара молоточком, который должен вернуть его в исходное положение (*б*). В новой конструкции в исходное положение возвращается только толкатель (*в*).

В чем причина неполадки и что вы порекомендуете предпринять?

Прежде чем продолжать чтение, попытайтесь самостоятельно дать определение задачи.

Определение задачи. В данном случае дать определение задачи — значит в значительной мере решить ее. Почему молоточек не возвращается вместе с толкателем. Вначале можно предположить, что он возвращается, но по какой-то причине отскакивает назад, так как теперь он стал легче. Конечно, это возможно, но, поскольку до этого упор его останавливал и поскольку толкатель назад не отскакивает, эта версия не кажется убедительной. Прежде чем анализировать эту маловероятную возможность, следует поискать другие объяснения.

Помимо контакта толкателя и молоточка с упором при ударе молоточка происходит также его взаимодействие с толкателем. Может быть, здесь искать причину неполадки? Может быть, новый, более легкий молоточек не может преодолеть инерцию толкателя и сместить его вперед, а вместо этого отскакивает назад? Эта версия кажется вполне вероятной и заслуживает анализа.

Однако, прежде чем приступать к анализу, инженер обнаружил другую возможность. По-видимому, при переделке молоточка не только уменьшилась его масса, но и снизилась его скорость. Однако конструктор убедил инженера, что скорость молоточка не изменилась.

Поэтому инженер решил проанализировать столкновение молоточка с толкателем, чтобы посмотреть, какое влияние может оказать масса молоточка на результирующее перемещение.

Инженер определяет свою задачу следующим образом (см. рис. 6.4).

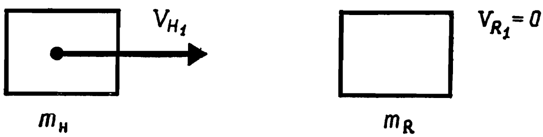
Дано: m_H, m_R, V_{H_1}, $V_{R_1}=0$ и l. Определить величину и направление скоростей V_{H_2} и V_{R_2} и выразить их через заданные параметры. На основании полученных результатов установить эффект изменения массы молоточка m_H.

Догадка. В доме инженера, работавшего над этой проблемой, в подвальном помещении был установлен биллиардный стол. Однажды вечером он заметил, что если происходит столкновение движущегося шара (который перемещается без вращения) с неподвижным, то неподвижный шар начинает перемещаться, а движущийся останавливается. Не мог ли этот же эффект останавливать молоточек? Что здесь напоминает два биллиардных шара?

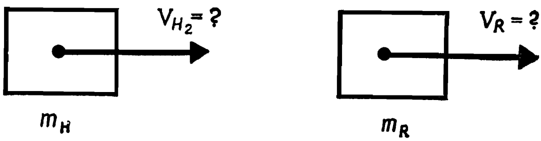
Построение модели. При построении модели инженер должен принять некоторое предположение относительно характера соударения между молоточком и толкателем. Не играют ли здесь какую-либо роль упругие волны внутри молоточка и стержня? Возможно, и играют, но вначале целесообразно рассмотреть более простое движение, происходящее при упомянутом выше столкновении двух биллиардных шаров. Будем считать, что молоточек и толкатель представляют собой абсолютно жесткие тела, и допустим, что соударение не сопровождается необратимым рассеянием энергии. Такое допущение возможно. Оно, правда, не объясняет наблюдаемых явлений, но для начала приемлемо. Таким образом, мы имеем модель соударения двух абсолютно жестких тел без рассеяния энергии, одно из которых движется, а другое первоначально находится в состоянии покоя.

Прежде чем продолжать чтение, подумайте, какие физические принципы существенны в этой задаче.

Использование физических принципов. Задача состоит в нахождении конечных скоростей молоточка и толкателя после их соударения, выраженных через их массы и начальные скорости. До соударения



После соударения



В этой задаче важную роль играют следующие принципы: закон сохранения количества движения и закон сохранения энергии. (Понимаете ли вы эти законы?) Применяя закон сохранения энергии и замечая, что внешние силы отсутствуют и что все движение происходит в одном направлении, получаем

$$m_H V_{H_1} = m_H V_{H_2} + m_R V_{R_2}.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{1}{2}m_HV_{H_1}^2=\frac{1}{2}m_HV_{H_2}^2+\frac{1}{2}m_RV_{R_2}^2.$$

Таким образом, имеем два независимых уравнения и два неизвестных: V_{H_2} и V_{R_2}.

Вычисления. Решая совместно оба эти уравнения для скорости толкателя и скорости молоточка после соударения, получаем

$$V_{R_2}=\frac{2}{1+m}V_{H_1},$$

$$V_{H_2}=\frac{1-m}{1+m}V_{H_1},$$

где m — отношение масс:

$$m=\frac{m_R}{m_H}.$$

При отыскании решения как m, так и V_{R_2} использовались как делители, поэтому результаты неприемлемы, если значение m или V_{R_2} равно нулю.

Оценка и обобщение. Механизм из толкателя и молоточка работал хорошо до тех пор, пока не была уменьшена масса молоточка. Изучение полученных результатов показывает, что если $m_H \gg m_R$ (m мало), то $V_{R_2}\to 2V_{H_1}$ и $V_{H_2}\to V_{H_1}$. В данном случае молоточек будет продолжать движение и после соударения. С другой стороны, если $m_H \ll m_R$ (m велико), $V_{R_2}\to 0$ и $V_{H_2}\to -V_{H_1}$. В этом предельном случае молоточек просто отскакивает назад от более тяжелого толкателя. Вспоминая случай соударения биллиардных шаров, где $m=1$, получаем

$$V_{R_2}=V_{H_1}$$
$$V_{H_2}=0.$$

По-видимому, именно это и происходит в нашем случае. Инженер проверил массу молоточка и массу толкателя и нашел, что в результате изменения конструкции их массы оказались почти равными Поэтому в его отчете (который здесь не приводится) рекомендуется увеличить вес молоточка или уменьшить вес толкателя, что позволит устранить «эффект биллиардного шара».

6.14. Пример: ускорение автомобильного колеса

Постановка задачи. Для динамической балансировки автомобильных колес без снятия их с автомобиля используется небольшой вращающийся цилиндр с приводом от двигателя. Чтобы раскрутить колесо, этот цилиндр прижимают к покрышке шины, как это показано на рис. 6.5. При использовании этого приспособления в гаражах стало обычной практикой раскручивать его до полной скорости еще до

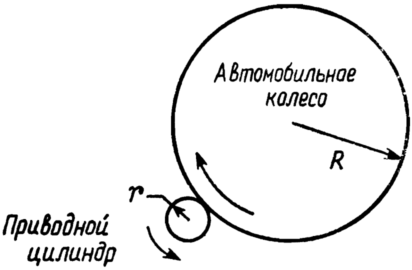


Рис. 6.5.

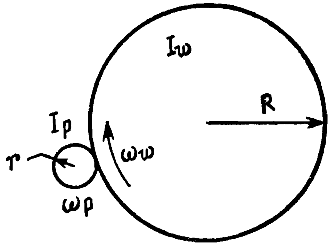


Рис. 6.6.

соприкосновения с покрышкой. После этого приводной цилиндр прижимают к покрышке. Требуется оценить энергию, рассеиваемую в виде тепла при следовании такой практике.

Прежде чем продолжать чтение, попытайтесь самостоятельно дать определение задачи.

Определение задачи. Данная задача сформулирована, безусловно, довольно неопределенно. Однако если определены некоторые величины, являющиеся основными параметрами этой задачи (рис. 6.6), то не представляет труда сформулировать и определение задачи. Наша задача состоит в том, чтобы найти энергию, рассеиваемую в виде тепла в тот период, когда колесо автомобиля, находившееся в состоянии покоя, с помощью приводного цилиндра, вращающегося со скоростью ω_p, приобретает ускорение и достигает скорости ω_w, и выразить эту энергию через R, r, I_w, I_p, ω_w, ω_p. Прежде чем продолжать чтение, подумайте, какие допущения подойдут при построении модели для этой задачи и какие физические принципы здесь приемлемы.

Построение модели. Возможно, что в процессе ускорения автомобильного колеса скорость вращения приводного цилиндра несколько замедлится, но, если приводом цилиндра служит асинхронный двигатель переменного тока (что наиболее вероятно), снижение скорости будет весьма незначительным. Во всяком случае, даже если допущение, что угловая скорость ω_p является постоянной величиной, будет ошибочным, это не повлияет на результат, и поэтому мы его принимаем.

На что еще расходуется энергия, помимо того, что она рассеивается в виде тепла? Некоторая часть энергии, разумеется, расходуется на приведение во вращение автомобильного колеса и запасается в нем в виде кинетической энергии вращения. Немного энергии рассеивается из-за трения в подшипниках, но эта величина пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией вращения. Кроме того, некоторая часть энергии поглощается в результате упругой деформации покрышки. Последняя, однако, возвращается обратно, когда покрышка шины снова принимает свою нормальную форму и, здесь рассеяние энергии, безусловно, пренебрежимо мало. Теперь мы получили следующую модель.

Приводной цилиндр, вращающийся с постоянной скоростью, ускоряет автомобильное колесо с недеформирующейся покрышкой. При этом энергия либо запасается как кинетическая энергия вращающегося колеса, либо рассеивается в виде тепла вследствие проскальзывания колеса относительно приводного цилиндра.

Используя физические принципы, необходимо вывести дифференциальное уравнение, чтобы найти полную работу, выполняемую приводным цилиндром в процессе ускорения автомобильного колеса. Часть этой работы, рассеиваемая в виде тепла, находится путем вычитания из полной работы той части, которая запасается в виде кинетической энергии вращения автомобильного колеса. Прежде чем продолжать чтение, попытайтесь составить и решить дифференциальное уравнение для полной работы. (Замечание: коэффициент, характеризующий трение между покрышкой и приводным цилиндром, вам не потребуется.)

Использование физических принципов. Работа, выполняемая приводным колесом, расходуется по двум направлениям: запасается в виде кинетической энергии вращающегося автомобильного колеса и рассеивается в виде тепла. Количество запасаемой энергии равно $\frac{1}{2} I_w \omega_w^2$. Если бы можно было найти полную работу, то количество рассеиваемой энергии определялось бы как разность. Для нахождения полной работы, выполняемой приводным цилиндром, необходимо составить простое дифференциальное уравнение.

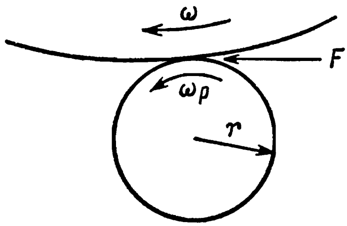


Рис. 6.7.

Рассмотрим момент времени, когда автомобильное колесо имеет угловую скорость ω (лежащую между нулем и конечной скоростью ω_w), что показано на рис. 6.7. Расходуемая мощность равна

$$P = (\text{Сила}) \times (\text{Скорость}) = Fr\omega_p.$$

За время dt колесо получает ускорение $\omega + d\omega$ и выполняемая работа равна

$$dW = Pdt = Fr\omega_p dt.$$

Силу F можно найти, если известна нормальная составляющая силы, с которой цилиндр воздействует на колесо и коэффициент трения. Однако силу F можно найти также и другим способом, связывая F с ускорением автомобильного колеса согласно второму закону Ньютона, выражаемому в данном случае как $\tau = I\varkappa = I(d\omega/dt)$. Крутящий момент, действующий на автомобильное колесо, равен

$$\tau = FR = I_w \frac{d\omega}{dt}.$$

Подставляя это соотношение в уравнение для работы, получаем

$$dW = \frac{I_w}{R} r\omega_p \frac{d\omega}{dt} dt.$$

Интегрируя после упрощения от $\omega=0$ до $\omega=\omega_w$, находим

$$W = \frac{I_w}{R} r\omega_p = \int_0^{\omega_w} dW = \frac{I_w}{R} r\omega_p\omega_w.$$

Кроме того, в данном случае справедливо, что

$$r\omega_p = R\omega_w,$$

и поэтому

$$W = I_w\omega_w^2.$$

Поскольку $\frac{1}{2} I_w\omega_w^2$ — количество энергии, расходуемой на раскручивание колеса, количество рассеиваемой энергии равно

$$D = I_w\omega_w^2 - \frac{1}{2} I_w\omega_w^2 = \frac{1}{2} I_w\omega_w^2.$$

Получив эти данные, инженеры могут теперь подойти к решению теплотехнической задачи, связанной с отводом этой энергии. В качестве упражнения читателю предлагается составить отчет о полученных результатах объемом в одну страницу.

6.15. Краткие выводы

Назначение этой главы состояло в том, чтобы дать студентам обзор физических принципов и новый подход к их использованию. Подчеркивалась та мысль, что при решении задач по возможности нужно использовать основные идеи. Как и в остальных главах книги, эта точка зрения иллюстрировалась примерами. Студенты, которые глубже уяснят себе физические принципы и научатся составлять и выводить дифференциальные уравнения, будут щедро вознаграждены: они смогут с возросшей уверенностью решать инженерные задачи.

В следующей главе рассматриваются проверки, выполняемые при инженерном анализе. Как вы увидите, проверки играют важную роль и представляют собой значительно большее, чем просто повторное выполнение арифметических действий.

Задачи

6.1. При решении задач о прочности материала обычно используется уравнение балки $EI(d^2y/dx^2)=M$. Рассмотрите физические принципы, на которых оно построено, скрытые допущения и способ его правильного использования.

6.2. Что такое поверхностное натяжение?

6.3. Допустим, что вы хотите дать ребенку «интуитивное» представление об эффекте Кориолиса. Как бы вы справились с этим делом?

6.4. Что такое вязкоупругая жидкость?

6.5. Допустим, что в лабораторных условиях при выполнении эксперимента вы определили полный коэффициент излучения равным 1,2. Какой физический принцип нарушает полученное вами числовое значение? Доверяете ли вы физическому принципу или же полученному вами числу? Почему?

6.6. Часто допускается, что пружина невесома, хотя, безусловно, это не так. Рассмотрите свободное колебание реальной пружины. Теперь рассмотрите колебание невесомой пружины с присоединенной к ней массой. Какой должна быть присоединенная масса, чтобы получить ту же частоту собственных колебаний, что и в реальной пружине?

6.7. Почему в неинерциальной системе координат невозможно непосредственное применение второго закона Ньютона?

6.8. Какие допущения лежат в основе уравнения Навье — Стокса? уравнения Бернулли?

6.9. Многие задачи можно решить, допуская, что центр масс распределенной или расчлененной системы не перемещается. Какой физический принцип используется в таких случаях? Решения такого рода часто кажутся «весьма хитроумными», так как студенты и не помышляют о применении физического принципа, когда две или большее число частей такой системы участвуют в некоторых процессах. Что можно предпринять, чтобы помочь студентам подумать об этой возможности (не заставляя их применять этот принцип необдуманно)?

6.10. Установленная на железнодорожной платформе пушка весом 500 *кг* выстреливает 25-килограммовый снаряд на расстояние, равное 1 *км*. На какое расстояние переместится железнодорожная платформа?

6.11. Баллон, наполненный гелием, с помощью длинной бечевки прикреплен к стенке кузова автомобиля. Каким образом баллон будет перемещаться относительно автомобиля при его движении с ускорением?

6.12. При старте ракеты топливо горит с постоянной скоростью. Запишите уравнение движения ракеты.

6.13. Какой физический принцип применим к потоку жидкости, проходящему через пористую среду?

ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ

1. Haberman C. M., Engineering Systems Analysis, Charles E. Merill Books, Columbus, Ohio, 1965.
Хорошая книга для тех, кто испытывает затруднения при составлении дифференциальных уравнений.
2. Hughes W., Eber G., Basic Equations of Engineering Science, Schaum Pub. Co., New York, 1964.
Обширное собрание формальных уравнений. Впрочем, для того чтобы применять их, нужно знать, что означают содержащиеся в них символы в реальной действительности, и учитывать условия и допущения, использованные при их выводе, но естественно не указанные в этой книге.
3. Shames I., Mechanics of Fluids, McGraw-Hill, New York, 1962.
Книга содержит прекрасное изложение метода тепловых векторов применительно к фиксированным системам и фиксированным объемам с использованием закона сохранения массы и второго закона Ньютона.
4. Shapiro A. H., The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow. The Ronald Press, New York, 1953, vol. 1.
Исходя из фундаментальных законов, автор дает ясный и строгий вывод уравнений для массы, количества движения, энергии и энтропии на основе рассмотрения фиксированного объема.
5. Tribus M., Thermostatics and Thermodynamics, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1961.
В этой книге анализируются работа в общем виде и многие процессы, часто не рассматриваемые инженерами.
6. Ver Planck D. W., Teare B. R., Engineering Analysis, John Wiley, New York, 1959.
Эту книгу мы уже рекомендовали вам раньше, но она стоит того, чтобы назвать ее еще раз. В ней содержится неплохой материал, посвященный выводу дифференциальных уравнений.

ГЛАВА 7

ПРОВЕРКИ

7.1. Введение

Проверки выполняются не на каком-либо одном этапе решения задачи, они используются на протяжении всего процесса инженерного проектирования. Однако в книге такого рода их следует рассмотреть в одном месте, хотя читатель уже мог заметить, что во всех примерах проверкам уделялось большое внимание. Если главу, посвященную проверкам, поместить в начале книги, то обсуждение этого вопроса будет в некоторой степени бесплодным, поскольку читатель еще не познакомился с типичными задачами, на которые делаются ссылки. Если же, напротив, поместить ее в конце книги, то у читателя не представится возможности выполнить проверки в каком-либо из рассматриваемых примеров. Поэтому было решено поместить эту главу почти в середине книги.

При решении инженерных задач проверки означают нечто значительно большее, чем просто проверки выполнения арифметических или алгебраических действий — сложения, вычитания и т. д. Такие обычные проверки важны и их значение не следует преуменьшать, а ими самими пренебрегать, как это делают некоторые студенты, считающие, что выполнять точные вычисления ниже их достоинства. В проверки, в том виде как они здесь рассматриваются, вкладывается более широкое понятие, и проверки арифметических или алгебраических действий составляют только часть их. В табл. 7.1 перечисляются три вида проверок:

1. Проверка результатов арифметических или алгебраических операций.

2. Проверка результатов операций высшей математики.

3. Проверка результатов исходя из физического смысла.

Как видно из табл. 7.1, проверкам каждого вида могут подвергаться как числовые, так и аналитические результаты. В остальной части главы эти три вида проверок рассматриваются более детально, а затем приводятся два примера.

Таблица 7.1

Виды проверок и их выполнение применительно к числовым и символическим результатам

<table>
<tr><th>Виды проверок</th><th>Проверка числовых результатов</th><th>Проверка символических результатов (уравнений)</th></tr>
<tr><td rowspan="1">Проверка результатов арифметических или алгебраических операций</td><td colspan="2">Повторением последовательности операций
Обращением последовательности операций
Применением другого способа получения результата</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Проверка результатов операций высшей математики</td><td colspan="2">Повторением последовательности операций</td></tr>
<tr><td>Подстановкой результата в исходное выражение
Применением другого способа получения решения</td><td>Подстановкой результата в исходное выражение: например, проверка того, удовлетворяет ли решение дифференциальному уравнению и граничным условиям
Применением другого способа получения результата, например использование формального и концептуального подходов</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Проверка физического смысла результата</td><td>Проверка соответствия результата с имеющимися данными
Проверка соответствия результата с практикой</td><td>Правильна ли размерность?
Проверка пределов
Проверка тренда
Проверка знаков
Существенные и несущественные факторы</td></tr>
<tr><td colspan="2">Проверка порядка величины</td></tr>
</table>

7.2. Проверка результатов арифметических и алгебраических действий

Проверка результатов арифметических и алгебраических действий является обычной проверкой и выполняется с целью исключения ошибок при арифметических и алгебраических вычислениях. Эта проверка очень важна, поскольку не имеет значения, получен ли неверный ответ, например, из-за ошибки, допущенной при сложении, или же причина ошибки является более существенной. Поэтому такого рода проверки следует выполнять на каждом этапе инженерного анализа как при численных расчетах, так и при выводе и преобразовании математических выражений в алгебраической форме.

Существуют по меньшей мере три способа выполнения этих проверок. Один из них состоит просто в повторении первоначальных вычислений, здесь он называется *проверкой путем повторения последовательности операций*. Такая проверка наименее надежна, поскольку люди склонны снова и снова повторять свои ошибки.

Второй метод проверки арифметических и алгебраических действий состоит в изменении первоначальной последовательности выполняемых операций на обратную. Например, в простом случае сложения это означает суммирование столбца чисел сверху вниз, если первоначально числа складывались снизу вверх. Оперируя с алгебраическими выражениями, также можно изменить последовательность операций на обратную и найти исходное выражение. Такого рода проверка называется *проверкой путем обращения последовательности операций*.

Наконец, третьим видом проверок является *применение другого способа получения результата*. Например, если решается система двух уравнений относительно x и y и вначале исключается x и находится y, то для проверки полученного результата можно вначале исключить y, а затем найти x.

Ничто не действует на инженера так удручающе, как бессмысленная ошибка, допущенная в простых вычислениях. Нужно привыкать к непрерывной проверке арифметических и алгебраических действий.

7.3. Проверка результатов операций высшей математики

Проверки результатов операций высшей математики являются математическими по своему характеру (в этом они отличаются от рассматриваемой в следующем разделе проверки физического смысла результатов), однако в отличие от проверки результатов арифметических и алгебраических операций они выполняются с применением высшей математики. Примерами таких проверок являются: 1) проверка правильности решения дифференциального уравнения; 2) проверка сходимости численного решения дифференциального уравнения; 3) проверка правильности обращения матрицы; 4) проверка вывода дифференциального уравнения и т. д.

Проверки результатов операций высшей математики можно подразделить на проверки путем повторения последовательности операций, проверки путем подстановки результата в исходное выражение и проверки путем применения другого способа получения решения. При проверке решения дифференциального уравнения можно повторить первоначальные выкладки или подставить полученный результат в исходное выражение, чтобы убедиться, что он удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям, либо найти другой метод решения. Вывод дифференциального уравнения можно проверить, например, используя формальный и концептуальный подходы (см. гл. 6). (Этот способ имеет также большое значение с точки зрения обучения.)

7.4. Проверка физического смысла результата

Последний вид проверок, проводимых при инженерном анализе, называется проверкой *физического смысла* результата. Имеются веские основания не путать физический смысл со *здравым смыслом* или общим мнением. Когда-то, по общему мнению, считалось, что Земля плоская. Не все то, что делается или говорится во имя здравого смысла, действительно имеет смысл. Здравый смысл позволял сжигать «колдунов», преследовать Галилея и смеяться над паровой машиной. Лучше полагаться на этические нормы и физический смысл, а не на общее мнение. (Впрочем, закончим на этом проповедь против здравого смысла.)

Что же подразумевается под физическим смыслом? В случае числовых результатов он позволяет установить соответствие полученных цифр с имеющимися данными и определить, являются ли эти числа практически *реальными*. Недавно мне рассказали о молодом инженере, который так спроектировал обычный газопровод, что скорость газа в нем соответствовала $M=3$ (M — число Маха). Все вычисления были выполнены правильно и грамотно проведена минимизация стоимости материала. Однако инженер не поинтересовался физическим смыслом полученного решения.

Проверка физического смысла символических выражений означает не только проверку правильности результата или их соответствия с имеющимися данными. Можно выделить пять очевидных аспектов проверки физического смысла результатов. Прежде всего, и это самое важное, проверяется, *не противоречиво ли уравнение с точки зрения размерности*. Эта простая проверка настолько легка и в то же время настолько важна, что ее, безусловно, можно поставить на первое место в любом списке «десяти заповедей» инженерного анализа. Эта проверка, подобно проверке результатов арифметических и алгебраических операций, *должна* стать привычкой.

Во-вторых, это *проверка пределов*. Дает ли уравнение имеющие смысл (т. е. согласующиеся с имеющимися данными) результаты, если различные параметры поочередно мысленно устремлять к некоторому пределу, например к нулю, бесконечности или некоторому граничному значению? Проверки пределов наиболее важны при определении разумности результатов, полученных при инженерных расчетах.

В-третьих, это *проверки тренда* (тенденции изменения). Для проверки физического смысла нет необходимости мысленно устремлять параметры к некоторому пределу. Можно просто представить себе, что они возрастают или убывают, и проверить, совпадают ли результирующие значения остальных параметров с ожидаемыми.

В-четвертых, это *проверки законов*. Дополняют ли друг друга факторы, которые должны оказывать одинаковое воздействие, иначе говоря, влияют ли они на результат в одинаковом направлении, т. е. имеют ли они одинаковый знак? Соответствуют ли знаки различных членов тому, что ожидается?

Наконец, хорошая проверка решения задачи предполагает использование инженерной оценки для того, чтобы определить, *все ли существенные факторы учтены в уравнении*. Например, уравнение течения вязкой жидкости, в котором не учитывается вязкость самой жидкости, нужно обязательно подвергнуть проверке, прежде чем его можно будет использовать.

В остальной части этой главы приводятся два примера, в которых особое внимание уделяется проверкам. Однако, как и во всех примерах этой книги, они иллюстрируют весь процесс инженерного анализа.

7.5. Пример 1. Задача о химическом составе продуктов сгорания

Постановка задачи. Имеющиеся данные о работе топки большого котла, в которой сжигается газообразное топливо, называемое генераторным газом, привели к результатам, которые являются абсурдными. Это топливо сжигается при 25%-ном избытке воздуха, а газовая смесь имеет следующий состав:

3,0% CO_2
26,0% CO
1,0% O_2
12,8% H_2
57,2% N_2

С помощью газоанализатора Орса установлено, что газ в вытяжной трубе имеет следующий состав:

11,25% CO_2
0,84% CO
2,46% O_2
85,45% N_2

Вследствие неудачного расположения оборудования проба для газоанализатора Орса бралась в вытяжной трубе на значительном удалении от топки. Была высказана мысль (обратите внимание на ее творческий характер), что причиной столь странных данных мог быть подсос воздуха в вытяжную трубу. Кроме того, здесь возникли затруднения, связанные с конденсацией водяного пара в вытяжной трубе.

Определение задачи. Инженер, которому было поручено решение этой задачи, должен был ее самостоятельно определить. Ему было предложено только «разобраться в этом вопросе». Инженеру нужно перейти от этой неопределенной задачи к вопросам, на которые можно получить количественный ответ (путем инженерного анализа). Какими должны быть эти вопросы? Попытайтесь самостоятельно поставить их, прежде чем продолжить чтение.

Ниже дается определение предложенной задачи:

1. Определить количество воздуха, поступающего в вытяжную трубу в результате присоса. (Одним из возможных ответов является нуль.)
2. Определить точку росы водяных паров, содержащихся в газообразных продуктах сгорания в вытяжной трубе без присоса и при присосе.

Абсолютно необходимо, чтобы для решения задачи такого рода инженер выбрал химическую базисную единицу. За основу можно, например, взять 1 *кг* топлива, 1 *кг* сухого газа в вытяжной трубе, 1 *кг-моль* топлива и т. д. В то же время выбор некоторых из возможных базисов приведет к очень сложным вычислениям. (Допустим, например, что инженер мог принять за основу 1 *кг* воздуха, расходуемого на горение, или 1,0 *кг-моль* присасываемого воздуха.) Однако он решает принять за основу 1,0 *кг-моль* топлива, и на этой основе строить все свои расчеты. Далее он решает составить уравнение баланса масс, чтобы проверить, находятся ли в равновесии исходные вещества и продукты сгорания или же равновесие достигается лишь при учете присасываемого воздуха. Затем инженер вычислит процентное содержание водяного пара (на молярной основе) в газах до и после просачивания воздуха, если последнее будет иметь место. Это позволит ему получить парциальное давление пара, пользуясь которым можно определить точку росы.

Построение модели. Сформулированная задача состоит в определении количества воздуха, поступающего в вытяжную трубу в результате присоса, при условии, что это имеет место. Полученную информацию инженер изобразил на рис. 7.1, *а*. Какие еще допущения необходимо принять о процессе сгорания топлива? Анализ продуктов сгорания с помощью газоанализатора Орса? Другие методы? Обдумайте этот вопрос, прежде чем продолжить чтение.

Инженер не мог с уверенностью принять обычное допущение о «полном» сгорании, поскольку в продуктах сгорания присутствует окись углерода. Однако ему действительно нужно кое-что знать о газоанализаторе Орса и о том, что именно он измеряет. Обратите внимание на то, что в числе продуктов сгорания не назван водород, а в топливе содержится 12,8% H_2. Что происходит с водородом? Здесь необходимо напомнить, что газоанализатор Орса измеряет в вытяжной трубе процентное содержание сухого газа. По мере охлаждения пробы газа бо́льшая часть водяных паров, поступивших в газоанализатор, конденсируется. Следовательно, разумно предположить, что поступающий водород

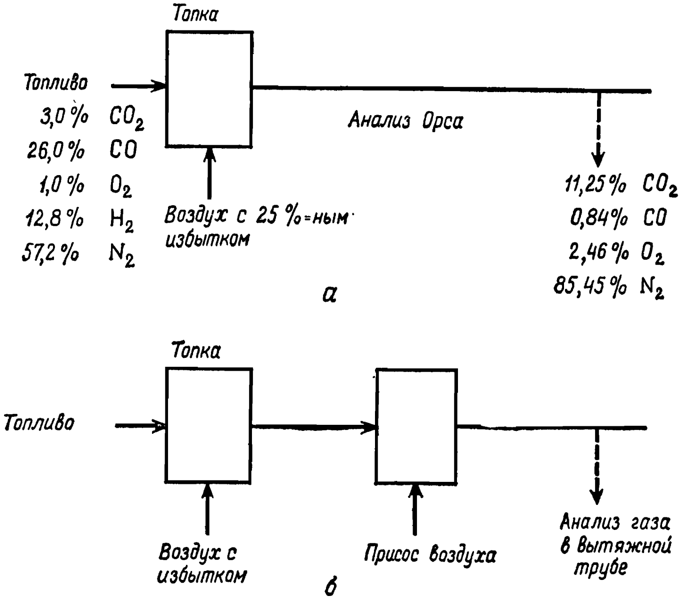


Рис. 7.1. *а* — полученная информация; *б* — модель.

покидает вытяжную трубу как H_2O, что не обнаруживается газоанализатором Орса.

Удобно построить новую схему, изображенную на рис. 7.1, *б*. Теперь инженер может предположить, что в указанной на чертеже точке в вытяжную трубу в результате подсоса поступает x единиц воздуха. Если затем его предположения о балансе масс окажутся правильными, он сможет вычислить x. Обратите внимание на то, как далеко ушел инженер от своего первоначального задания «разобраться в вопросе». Теперь он сформулировал разрешимую инженерную задачу.

Использование физических принципов. Если задана модель, изображенная на рис. 7.1, *б*, то задача состоит в определении количества воздуха, поступающего в результате присоса. Первым принципом, который нужно применить, является закон сохранения массы. Этот закон позволяет определить, сколько воздуха должно поступить, чтобы сохранилось равновесие.

Чтобы составить баланс масс, инженер должен прежде всего выбрать базис для своих вычислений. Хорошим является такой базис, который облегчает вычисления и не меняется в процессе решения задачи. Инженер не захотел брать за основу 1 *г-моль* продуктов сгорания. Однако 1 *г-моль* топлива может служить удобным базисом, поскольку в данной задаче все расчеты можно свести к нему и считать, что все вычисления ведутся на 1 *г-моль поступающего топлива.*

Когда базис выбран, применение закона сохранения массы не представляет труда. На протяжении всего процесса легко проследить за отдельными элементами. Углерод поступает лишь один раз, поскольку он содержится только в топливе и его нет в воздухе. В конечном счете должен быть составлен баланс масс *всех* элементов.

Прежде всего подсчитаем количество воздуха, расходуемого на горение, и количество избыточного воздуха. Если бы воздуха было ровно столько, сколько нужно для полного сгорания, то потребовалось бы

0,130 *г-моль* O_2 на 0,26 *г-моль* CO для образования CO_2
0,064 *г-моль* O_2 на 12,8 *г-моль* H_2 для образования H_2O

0,194 *г-моль* O_2 для обеспечения полного сгорания.

Поскольку имеется 25%-ный избыток воздуха, необходимо брать $1{,}25 \times 0{,}194 = 0{,}243$ *г-моль* O_2 (на 1 *г-моль* топлива).Эти числа легко проверить путем «обратных» вычислений.

На данном этапе инженеру нужно принять допущения, которые не были приняты ранее. Так бывает часто. Инженер должен уточнить, что подразумевается под воздухом. Обычно предполагается, что воздух — это сухая смесь газов, в которой на 21% кислорода приходится 79% азота (в граммолях). Это эквивалентно тому, что на 1 *г-моль* O_2 приходится 3,77 *г-моль* N_2. (Как это можно проверить?) Таким образом, инженер пренебрегает наличием в воздухе других элементов и водяного пара. В этой задаче рассматривается 0,243 *г-моль* O_2 и, следовательно, $0{,}243 \times 3{,}77 = 0{,}916$ *г-моль* N_2, поступающего как с воздухом, расходуемым на горение, так и с избыточным воздухом. Таким образом, инженер получил следующую схему:

Топка

0,03 *г-моль* CO_2
0,26 *г-моль* CO
0,01 *г-моль* O_2
0,128 *г-моль* H_2
0,572 *г-моль* N_2
→ [Топка] →
1,488 *г-моль* N_2
0,29 *г-моль* C

↑
0,243 *г-моль* O_2
0,916 *г-моль* N_2

Поскольку в данном случае углерод поступает только с топливом, в составе продуктов сгорания должно быть 0,29 *г-моль* углерода.

Таким образом, $11{,}25+0{,}84=12{,}09\%$ продуктов сгорания эквивалентно 0,29 *г-моль*. Всего на продукты сгорания приходится

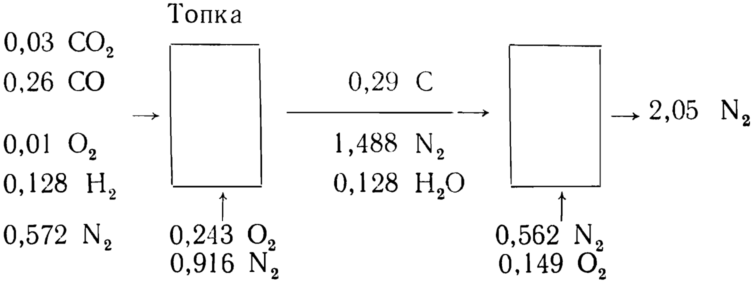
$$\frac{100}{12{,}09} \times 0{,}29 = 2{,}40 \text{ г-моль.}$$

Не следует, однако, забывать, что анализатор Орса определяет состав только сухих газов. Таким образом, следует предположить, что весь водород сгорает и образуется H_2O. Поскольку в топливе содержится 0,128 *г-моль* водорода, то и в продуктах сгорания будет также 0,128 *г-моль* H_2O. Таким образом, общее число грамм-молекул в продуктах сгорания равно $2{,}40+0{,}128=2{,}528$. Проверьте эту схему.

Если теперь заметить, что в газоанализаторе Орса 85,45% смеси сухих газов, составляющих 2,40 *г-моль*, приходится на азот, то можно найти, что азота будет

$$0{,}8545 \times 2{,}40 = 2{,}05 \text{ г-моль.}$$

Но из топки уходит только 1,488 *г-моль* азота! По-видимому, $2{,}05-1{,}488=0{,}562$ *г-моль* азота попадает в вытяжную трубу из воздуха. Это означает также, что при этом дополнительно попадает $0{,}562/3{,}77=0{,}149$ *г-моль* кислорода. Итак, уже достигнут определенный прогресс:



Это только половина работы. Прежде чем идти дальше, необходимо выполнить проверку. Для экономии места будем считать, что соответствующие проверки (какие именно?) выполнены и все оказалось в порядке. Вторая часть работы состоит в том, чтобы найти точку росы для водяных паров, содержащихся в газообразных продуктах сгорания в вытяжной трубе без присоса и при присосе.

Точкой росы называется температура, при которой происходит конденсация пара, содержащегося в смеси газов, если последняя охлаждается при постоянном давлении. На языке термодинамики это температура насыщения, соответствующая парциальному давлению водяного пара. Таким образом, на долю водяного пара приходится $0{,}128/2{,}528 = 0{,}0506$ *г-моль*, и парциальное давление водяного пара равно

$$0{,}0506 \times 1{,}04 \approx 0{,}052 \ кг/см^2.$$

Из таблицы параметров водяного пара находим, что соответствующая температура насыщения равна 35°C. Поскольку стенки выпускной трубы могут иметь температуру ниже 35° C, то указанная конденсация, по-видимому, вполне реальна.

С учетом присоса воздуха получим следующие цифры грамм-молей для различных газов:

$$\begin{array}{rr}
CO_2 & 0{,}1125 \times 2{,}40 = 0{,}270 \\
CO & 0{,}0084 \times 2{,}40 = 0{,}020 \\
O_2 & 0{,}0246 \times 2{,}40 = 0{,}059 \\
N_2 & 0{,}8545 \times 2{,}40 = 2{,}050 \\
H_2O & = 0{,}128 \\
\hline
 & 2{,}527
\end{array}$$

На воздух, поступающий в результате присоса, приходится 0,149 *г-моль* O_2 и 0,526 *г-моль* N_2. Кажется, что *при* присосе воздуха меньше свободного кислорода, чем без присоса. Это свидетельствует о том, что в вытяжной трубе происходит догорание топлива. Без учета присоса воздуха было 2,050—0,526 = 1,488 *г-моль* азота. Общее число грамм-молей на данном этапе вычислить нельзя, поскольку неизвестен химический состав компонентов. Закон сохранения массы справедлив только для элементов, но не для молей. Как оценку инженер может записать, что азот, несомненно, составляет около 80—85% смеси газов. Это выражается следующим образом:

Принятый процент N_2	Число грамм-молей	Доля грамм-моля H_2O	Парциальное давление H_2O, *кг/см²*	Точка росы, °C
80	1,488/0,80 = 1,86	0,128/1,86 = 0,0689	0,0689×1,04 = 0,072	39
85	1,488/0,85 = 1,75	0,128/1,75 = 0,0733	0,0733×1,04 = 0,076	40

Итак, несмотря на то, что точное число молей осталось неизвестным, ясно, что подсос воздуха снижает точку росы почти на 5,5°С и значительно усиливает конденсацию пара. Это говорит о том, что фирме следует найти и заделать отверстие в трубе, через которое происходит присос воздуха.

7.6. Пример 2. Толщиномер

Постановка задачи. Для измерения толщины небольших плоских деталей был предложен измерительный прибор с манометром, изображенный на рис. 7.2. Исследуйте возможность практической реализации такого прибора.

Определение задачи. Прежде чем можно будет сделать какой-либо вывод о полезности предложенного устройства, необходимо уяснить принцип его работы. На данном этапе инженеру неизвестно, как работает этот прибор. Прежде чем продолжить чтение, рассмотрите этот прибор и решите, как с его помощью можно определить толщину детали.

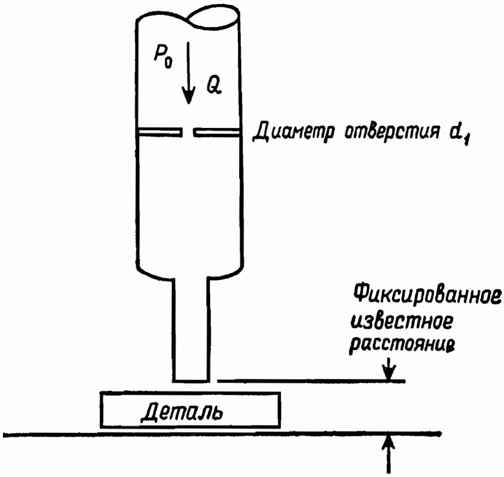


Рис. 7.2. Схема прибора для измерения толщины воздушной прослойки.

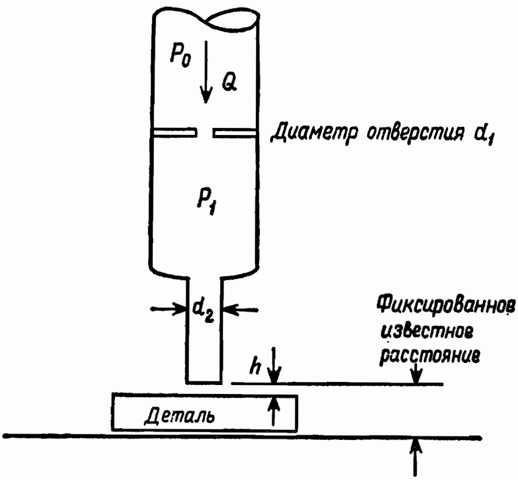


Рис. 7.3.

Прибор работает следующим образом (рис. 7.3). Давление P_0 поддерживается постоянным, а P_1 изменяется в зависимости от расстояния h. Если h приближается к нулю, то

P_1 стремится к P_0. Когда расстояние h достаточно велико, давление P_1 приближается к атмосферному (нулевое манометрическое давление). В промежутке между этими предельными значениями P_1 будет функцией h, и, измеряя P_1, будем получать h.

В качестве первого шага при определении возможности создания такого прибора желательно проанализировать этот прибор и найти соотношение, связывающее параметры задачи. В частности, необходимо связать P_1 с h через P_0, d_1, d_2 и h.

Рассмотрите самостоятельно допущения, которые нужно принять.

Построение модели. Разумно допустить, что в приборе используется несжимаемая изотермическая жидкость. Кроме того, будем считать, что, если исключить падение давления за отверстием мерной шайбы d_1 и на выходе, влияние трения пренебрежимо мало. Давление P_0 поддерживается постоянным, и рассматривается установившееся состояние. Имея эту модель, можно приступить к использованию физических принципов.

Использование физических принципов. Поскольку рассматривается установившийся поток несжимаемой жидкости, закон сохранения массы показывает, что объем жидкости, проходящей через отверстие мерной шайбы d_1, равен объему жидкости, проходящей через выходное отверстие. Для получения информации о силах, действующих на мерную шайбу, используем уравнение сохранения количества движения применительно к мерной шайбе. В случае установившегося потока несжимаемой жидкости при отсутствии трения уравнение сохранения энергии сводится к известному уравнению Бернулли. (Применение второго закона Ньютона в системе Лагранжа также дает такой же результат.) Общее уравнение сохранения энергии для установившегося потока имеет вид

$$\dot{Q}-\dot{W}=\left(h_2+\frac{V_2^2}{2}+gz_2\right)\dot{m}-\left(h_0+\frac{V_0^2}{2}+gz_0\right)\dot{m},$$

где индекс 2 относится к условиям в горловине отверстия d_1. Члены, учитывающие силу тяжести, пренебрежимо малы. Если проследить за состоянием жидкости в этом приборе, то, согласно первому закону термодинамики, имеем

$$Q-W=u_2-u_1.$$

Рассматривая совместно эти уравнения, получаем

$$0=\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}-\frac{P_0}{\rho}-\frac{V_0^2}{2}.$$

Поскольку $V_2^2 \gg V_1^2$, окончательный результат имеет вид

$$V_2^2=\frac{2(P_0-P_2)}{\rho}, \quad V_2=\sqrt{\frac{2(P_0-P_2)}{\rho}}.$$

Расход $\dot{Q}=AV$, поэтому

$$\dot{Q}=\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2(P_0-P_2)}{\rho}}.$$

Чтобы учесть различные факторы, которые были опущены при анализе, обычно в это уравнение вводят коэффициент расхода C_1 и рассматривают направленное вниз давление P_1 вместо давления P_2 у мерной шайбы, которое нельзя измерить. Таким образом,

$$\dot{Q}=C_1\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2(P_0-P_1)}{\rho}}.$$

Для стандартных мерных шайб коэффициенты C_1 известны и лежат в интервале от 0,60 до 0,80. Полученное уравнение нужно проверить. Прежде всего проверяем размерность:

$$\dot{Q} \to м^3/сек.$$

$$\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2(P_0-P_2)}{\rho}} \to м^2 \cdot \frac{кГ^{1/2}}{м} \cdot \frac{м^{3/2}}{кГ^{1/2}}.$$

Размерность не совпадает. Для устранения этого расхождения необходимо ввести переводной множитель $g_0=9{,}81$ *м* × × *кг/кГ·сек*^{2}.
Получаем

$$\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2(P_0-P_2)g_0}{\rho}} \to м^2 \cdot \frac{кГ^{1/2}}{м} \cdot \frac{м^{3/2}}{кг^{1/2}} \cdot \frac{м^{1/2}}{сек} \cdot \frac{кг^{1/2}}{кГ^{1/2}} \to \frac{м^3}{сек}.$$

В других отношениях это уравнение правильно.

Если теперь выходное отверстие также рассматривать как мерную шайбу, то получим

$$\dot{Q}=C_2\pi d_2 h\sqrt{\frac{2P_1g_0}{\rho}},$$

где площадь отверстия мерной шайбы принимается равной $\pi d_2 h$, C_2— коэффициент расхода для выходного отверстия, а P_1 рассматривается как манометрическое давление.

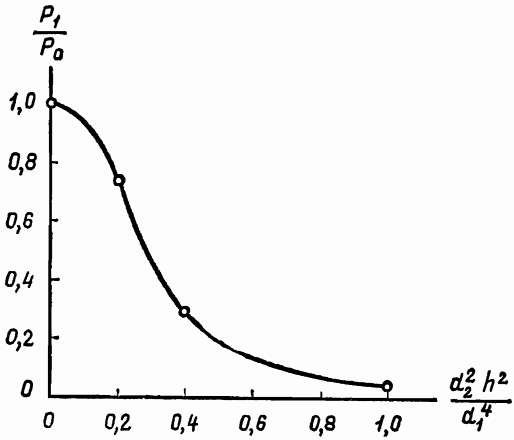


Рис. 7.4. Результаты анализа прибора для измерения толщины воздушной прослойки.

Согласно закону сохранения массы, значения $\dot{Q}$ должны быть равны

$$C_2\pi d_2 h\sqrt{\frac{2P_1g_0}{\rho}}=C_2\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2(P_0-P_1)g_0}{\rho}}.$$

После упрощения получаем

$$P_1=P_0\frac{1}{1+16(C_2^2d_2^2h^2/C_1^2d_1^4)}.$$

Размерность этого уравнения легко проверить визуально. Обратите внимание на то, что $h\to0$ при $P_1\to P_0$, что и ожидалось. (Проверка пределов.) Кроме того, при возрастании h, как и ожидалось, $P_1\to0$. (Проверка пределов.) Таким образом, уравнение вполне приемлемо.

Коэффициент расхода является функцией отношения площади отверстия к площади поперечного сечения трубки, но, когда это отношение становится совсем мало, коэффициент расхода стремится к некоторому постоянному значению, близкому к 0,60. Если оба эти коэффициента равны, то безразмерное уравнение принимает вид

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{1 + 16\,(d_2^2 h^2 / d_1^4)}\,.$$

Графическое изображение этих результатов дается на рис. 7.4. Это уравнение можно использовать для отыскания d_2, d_1 и P_0 в требуемом интервале значений h. На этом завершается выполнение поставленных задач.

С целью окончательной проверки наблюдательный инженер может исследовать то обстоятельство, что свойства жидкости (особенно плотность) не отражены в уравнении и не влияют на результат. Правильно ли то, что полученный результат не зависит от свойств жидкости, используемой в измерительном приборе?

7.7. Краткие выводы

Проверки арифметических действий, математических выкладок или физического смысла результатов должны производиться в ходе всего процесса инженерного анализа. В этой главе были перечислены и кратко рассмотрены проверки различного характера. Студенту можно рассказать о проверках, но его нельзя заставить выполнять их — вспомните историю о лошади и воде[1]). Тщательное и умелое выполнение проверок свидетельствует о зрелости инженера. *Проверяйте свою работу*!

В следующей главе мы уделим внимание вычислениям, выполняемым при инженерном анализе. Обычные арифметические и алгебраические операции здесь не рассматриваются, не изучается также и решение дифференциальных уравнений. Эти вопросы достаточно полно изложены в специальных курсах. Вместо этого рассматривается ситуация,

[1]) Суть этой истории в том, что лошадь можно подвести к воде, но ее невозможно заставить пить.— *Прим. перев.*

когда инженеру нужно получить числовой результат, но обычные аналитические методы не приемлемы.

В таких случаях необходимо применить либо численный анализ (возможно, с использованием аналоговой или цифровой вычислительной машины), либо графические методы. По этой причине здесь рассматриваются только численные и графические методы решения уравнений.

Задачи

7.1. Если x — длина в метрах, а t — время, то какова размерность следующих дифференциальных выражений:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^5x}{dt^5}, \quad \frac{d}{dt}x^2t^3?$$

7.2. Прокомментируйте возможную зависимость между хорошей восприимчивостью (это свойство рассматривалось в гл. 2 в связи с изобретательством) и способностью правильно выполнять проверку результатов, исходя из физического смысла, при инженерном анализе.

7.3. Рассмотрите размерность уравнений

$$F = ma \quad \text{и} \quad \oint d'Q = \oint d'W.$$

7.4. Возьмите в библиотеке несколько журналов по вашей специальности и проверьте размерность уравнений, которые вы найдете в опубликованных там статьях. Проверьте также уравнения, используя проверки тренда и пределов

БИБЛИОГРАФИЯ

Ver Planck D. W., Teare B. R., «Engineering Analysis», Wiley, New York, 1954.

В этой книге имеется глава, посвященная проверкам.

ГЛАВА 8

ВЫЧИСЛЕНИЯ

8.1. Введение

Мы рассматривали в последовательном порядке различные этапы процесса инженерного анализа: определение задачи, построение модели, использование физических принципов, однако в гл. 7 мы несколько отклонились от этого порядка, с тем чтобы рассмотреть проверки. Как уже указывалось ранее, проверки выполняются на каждом этапе и после каждого этапа. Теперь наступило время снова вернуться к рассмотрению отдельных этапов инженерного анализа. Следующим этапом является выполнение вычислений. Когда модель построена и физические принципы использованы, обычно бывает необходимо разрешить составленные уравнения относительно искомых неизвестных. Могут быть получены дифференциальные и интегральные либо различного рода алгебраические уравнения. Вычисления могут выполняться с помощью арифметических действий, а также с применением довольно сложного аппарата алгебры и дифференциального или интегрального исчисления. Во многих случаях получение точных решений невозможно, так что бывает необходимо применять различные приближенные методы, например графические и численные. В данной главе аналитические методы решения дифференциальных и интегральных уравнений будут затронуты очень бегло, поскольку эти вопросы подробно изучаются в соответствующих разделах математики. Графические и численные методы будут рассмотрены более детально. В связи с тем что в настоящее время вычислительные машины, как цифровые, так и аналоговые, играют важную роль и широко используются, значение численных методов существенно возрастает. Современным инженерам необходимо умело использовать возможности вычислительной техники.

8.2. Решение уравнений в явном виде

Часто системы алгебраических уравнений, а также дифференциальные и интегральные уравнения имеют точные аналитические решения в замкнутой форме. Это означает, что можно записать в явном виде точные выражения для неизвестных, например $\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$ и $\int_a^b dx/x = \ln(b/a)$. Пусть дана система уравнений $2x+2y=a$, $x+y=b$. Решив ее, можно найти, что $y=2b-a$ и $x=a-b$. Если дано дифференциальное уравнение $d^2y/dx^2+by=0$, то его решение можно получить в виде $y=Ae^x$. Решение этих и многих других подобных им и даже более сложных уравнений изучается в курсах дифференциальных уравнений, математического анализа и алгебры. По этой причине в данной книге мы не будем тратить времени на их изучение. Вместо этого рассмотрим способы получения численных решений задач в тех случаях, когда точные аналитические методы не позволяют найти решение в явном виде.

8.3. Решение алгебраических уравнений графическим методом и методом проб и ошибок

Система n независимых уравнений с n неизвестными имеет единственное решение. Однако не всегда бывает легко решить эту систему уравнений относительно неизвестных в явном виде. Рассмотрим, например, простое уравнение с одним неизвестным $\sin x = x^2$. Здесь одно уравнение с одним неизвестным, но решение нельзя записать в таком виде, который позволяет непосредственно найти x. То же самое может иметь место в случае двух и большего числа неизвестных. Например, в случае следующей системы уравнений:

$$x^4y + xy^2 = 1,$$
$$x^3y^2 + x^2y^3 = 2$$

решение нельзя найти непосредственно. Такой же случай имел место в гл. 5 при решении задачи о теплоизоляции отопительных труб. Уравнения или системы уравнений, обладающие таким неблагоприятным свойством, называются *трансцендентными*. Для их решения необходимо применять графические методы или метод проб и ошибок либо и то и другое одновременно. В инженерной практике трансцендентные уравнения встречаются очень часто, и их нельзя рассматривать как исключение, поэтому важно, чтобы инженеры знали методы их решения.

Иногда встречаются такие случаи, когда непосредственное получение решения в явном виде *возможно*, но не целесообразно, т. е. быстрее и легче получить решение уравнения графическим способом или численным методом проб и ошибок, чем найти точное аналитическое решение. Чаще всего это относится к довольно громоздким или сложным уравнениям. Следует указать, что если число неизвестных больше двух, то применение графических методов обычно нецелесообразно вследствие того, что бумага, к сожалению, всего лишь двумерна. В случае большого числа неизвестных решение уравнений методом проб и ошибок целесообразно лишь в том случае, если применяется счетная машина или вычислительное устройство и используется итерационный метод, обеспечивающий быстрое получение результата. Вообще говоря, объем вычислений, необходимых для решения уравнения методом проб и ошибок, возрастает пропорционально 2^n, где n — число неизвестных.

Графическое решение трансцендентных уравнений находит очень широкое применение. Причины нежелания студентов решать уравнения графическими методами не всегда ясны. По-видимому, здесь действует сочетание нескольких факторов: 1) отсутствие «миллиметровки»[1]), 2) привычка к аналитическим методам, 3) убеждение, что графические решения отнимают много времени и требуют много черновой работы, и 4) убеждение, что графические решения не точны. Попытаемся осветить эти вопросы. Во-первых, отсутствие «миллиметровки» лишь ограничивает точность, но обычно не мешает получить приближенное решение. Кроме того, эту беду легко поправить, купив пачку «миллиметровки». Во-вторых, если известно, что получится трансцендентное уравнение, то это должно служить сигналом для отказа от аналитических методов. В-третьих, это просто неверно, что графические методы решения отнимают много времени. Если за эту работу приниматься сразу и со знанием дела, то для

[1]) У автора речь идет о ее американском эквиваленте, где основной единицей является дюйм (25,4 *мм*).— *Прим. перев.*

построения графика потребуется лишь несколько минут. В-четвертых, используя обычную «миллиметровку» размером 215×280 *мм*, при решении многих задач не представляет труда получить результаты с точностью, не уступающей точности расчета на логарифмической линейке. Используя лист бумаги большего размера, можно получить более высокую точность.

В качестве примера рассмотрим еще раз уравнение $x^2 = \sin x$. Для графического решения этого уравнения необходимо построить в одной системе координат два графика: $\sin x$ и x^2 как функции x. Пересечение кривых даст решение уравнения. Графическое решение этого уравнения показано на рис. 8.1. На обычном листе «миллиметровки» размером 215×280 *мм* получаем следующее решение: $1{,}13(\pi/4) = 0{,}886$. Беря в качестве решения 0,886, находим $\sin x = 0{,}774$ и $x^2 = 0{,}786$, что свидетельствует о неплохом совпадении результатов для графика такого размера, построенного от руки. Для построения исходного графика потребовалось менее 10 *мин*.

Таблица 8.1

Табличное решение уравнения $x^2 = \sin x$

x	x^2	$\sin x$	$x^2 - \sin x$
0,1	0,0100	0,0966	—0,0896
0,2	0,0400	0,1982	—0,1582
0,4	0,1600	0,3883	—0,2283
0,8	0,6400	0,7157	—0,0757
1,6	2,5600	0,9996	+1,5604
1,2	1,4400	0,9311	+0,5089
1,0	1,0000	0,8410	+0,1590
0,9	0,8100	0,7875	+0,0225
0,85	0,7225	0,7501	—0,0276
0,875	0,7660	0,7672	—0,0012

Эту же задачу можно легко решить численным методом проб и ошибок. В этих случаях всегда проще начинать с составления таблицы (табл. 8.1). Обычно необходимо иметь *некоторое* представление о порядке величины, получаемой в результате решения. Часто такую информацию позволяет получить график, быстро вычерченный от руки. В других случаях первое приемлемое значение подсказывает физический смысл. После того как сделано первоначальное предположение, дальнейшей задачей является *быстрейшее* нахождение другого предполагаемого значения, лежащего по другую сторону истинного значения. Так, если первоначальное значение слишком мало, то требуется быстро найти другое предполагаемое значение, которое очень велико, и наоборот. Желательно ограничить ответ пределом самого

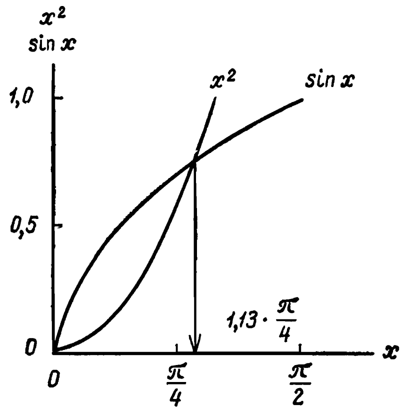


Рис. 8.1. Графическое решение уравнения $x^2 = \sin x$.

начала процесса, поскольку, добираясь к ответу с одной стороны, можно потерять много времени. (В некоторых случаях можно действительно добираться *очень* долго!) Когда получены одно очень большое и другое очень малое значения, беря среднее значение, быстро приближаемся к ответу. Поэтому запомните правило, которого необходимо придерживаться при численном решении уравнений методом проб и ошибок: быстро ограничивайте ответ пределами!

Простой способ быстрого нахождения интервала, на котором находится ответ, особенно тогда, когда о порядке величины известно очень мало, состоит в выборе начального значения, которое заведомо меньше искомого. Затем при каждом выборе нового предполагаемого значения предыдущее значение удваивается. Например, в нашем случае можно начать, как показано в табл. 8.1, с $x = 0,1$. Вторым предполагаемым значением будет $x = 0,2$, следующим за ним $x = 0,4$ и т. д. (Такого рода действия легко выполнять также и на вычислительной машине.) Заметим, что в четвертом столбце таблицы записана разность $x^2—\sin x$, которая должна стремиться к нулю. Когда разность меняет знак, это означает, что ответ ограничен пределами. Так, в нашем примере ясно, что $x=0,8$ — слишком малое, а $x=1,6$ — слишком большое значение. На данном этапе можно очень быстро приблизиться к ответу путем выбора каждого нового значения в середине интервала, ограниченного известными крайними значениями. Таким образом, на каждом этапе расстояние между крайними значениями уменьшается наполовину. В нашем примере последовательность предполагаемых значений такова: 0,8; 1,6; 1,2. Результат вычислений при $x=1,2$ определяет, будет следующим значением 1,0 или же 1,4. Это повторное деление пополам каждого из интервалов может продолжаться сколь угодно долго — предположительно до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Решая данный пример с помощью логарифмической линейки, получаем $x=0,875$, графическим методом находим $x=0,886$.

Приведенный здесь пример очень прост, однако использованный метод и рассмотренный порядок решения с успехом применяются и в других, более сложных случаях. Методы удвоения и деления пополам весьма полезны. Для экономии времени, труда и бумаги при решении большого числа уравнений целесообразно строить таблицу, аналогичную табл. 8.1. Разумеется, методы, позволяющие сэкономить время, можно разработать для любой конкретной задачи. Жалобы студентов на то, что при решении задач графическим методом, а также численным методом проб и ошибок приходится выполнять много черновой работы, в большинстве случаев являются просто результатом применения очень неэффективных приемов. Чаще всего эффективность можно повысить, отказавшись от предубеждений и проявив несколько бóльшую предусмотрительность. Например, при решении уравнения $x^2=\sin x$ была проделана некоторая лишняя работа. Поскольку при $x=0,8$ разность между x^2 и $\sin x$ составляет $-0,0757$, а при $x=1,6$ она равна $+1,5604$, то, по-видимому, разумно предположить, что ответ ближе к $x=0,8$, чем к $x=1,6$. Таким образом, можно было бы принять более точное значение, чем $x=1,2$. Кроме того, численные расчеты можно дополнить составлением изображенного на рис. 8.2 графика для x^2—sin x как функции x. Допустим, что этот график построен после выполнения вычислений для $x=0{,}8$ и $x=1{,}2$. Полагая, что между (x^2—sin x) и x существует линейная зависимость, получаем решение, равное $x=0{,}85$, что показано на графике сплошной линией. Это решение используется теперь как новое предполагаемое значение. Приняв его, получаем $x^2 - \sin x = -0{,}0246$. Допуская

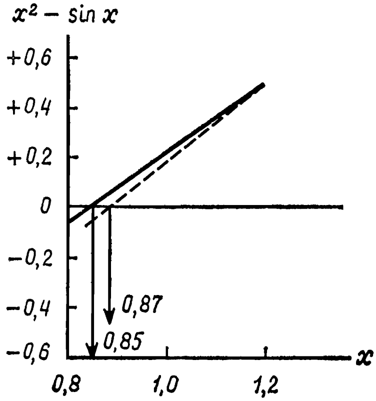


Рис 8.2. Графическое решение уравнения $x^2=\sin x$.

снова наличие линейного соотношения, получаем новую точку пересечения (пунктирная линия на рис. 8.2) и новое вычисленное значение. На этот раз результат равен $x=0{,}87$, т. е. получено довольно точное значение. Чтобы найти этот результат, нужно было дополнительно построить график, но зато вычислялись только два значения x^2—sin x. В данном примере построение графика не сказалось существенно на общем объеме работы, однако в тех случаях, когда вычислений много, простой метод линейной интерполяции позволяет получить значительную экономию времени. Эту операцию легко ввести также и в вычислительную машину.

Очевидно, что существует ряд приемов, позволяющих экономить время и труд при решении трансцендентных уравнений. Большинство этих приемов является просто остроумными находками людей, которым нужно было быстро получить точный числовой результат. Здесь были показаны некоторые простые приемы. Другие рассматриваются в литературе или в курсах лекций по численному анализу.

8.4. Графическое решение интегральных уравнений

Часто инженеры сталкиваются с необходимостью получить численное значение интеграла

$$I = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — функция, для которой получение аналитического решения в явном виде невозможно. Вычисление таких интегралов должно производиться численными методами или

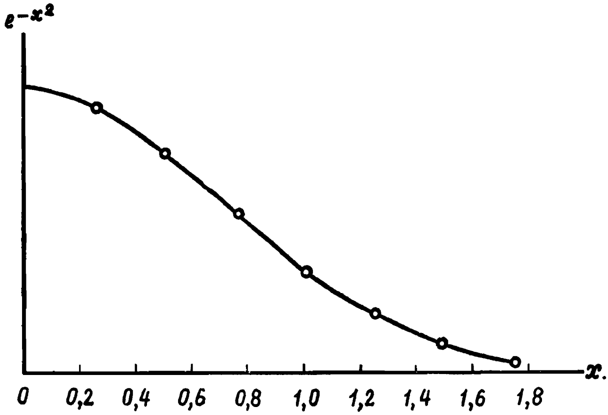


Рис. 8.3.

графически. В этом разделе рассматриваются графические, а в следующем — численные методы.

Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ графическим методом необходимо построить график функции $f(x)$. Тогда очевидно, что площадь под кривой между точками a и b и будет искомым значением. В качестве примера рассмотрим интеграл [1])

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx.$$

График функции e^{-x^2} показан на рис. 8.3. Площадь под кривой можно найти путем подсчета числа квадратов. На стандартной «миллиметровке» размером 215×280 *мм* общее число малых квадратов под кривой равно 7460. За единицу принята площадь, равная 100×100 *мм*^{2}, поэтому интеграл равен 7460/10 000=0,746.

Аналитическое решение, найденное с точностью до трех десятичных знаков, равно 0,747 [2]). На получение решения графическим путем ушло около 10 *мин*. Следовательно, нет никаких оснований возражать против применения графических методов интегрирования на том основании, что этот метод якобы неточен или требует много времени.

8.5. Численные методы решения интегральных уравнений

Для вычисления интегралов типа $I = \int_a^b f(x)dx$ можно также использовать различные численные методы. Наиболее распространенный метод состоит в аппроксимации кривой ступенчатой функцией. Вначале интервал (a, b) делится на подходящее число малых интервалов длиной Δx каждый (рис. 8.4). Затем для каждого из этих интервалов вычисляется функция $f(x)$. Обозначим через f_0 значение функции $f(x)$ в точке $x=a$, через f_1 значение функции $f(x)$ в точке $x=a+\Delta x$, через f_2 значение функции $f(x)$ в точке $x=a+2\Delta x$ и т. д. Тогда площадь под кривой между точками a и b будет равна

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = f_0 \frac{\Delta x}{2} + f_1 \Delta x + f_2 \Delta x + \ldots + f_k \frac{\Delta x}{2},$$

---

[1]) Интеграл $I = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-x^2} dx$ называется интегралом вероятности ошибки и обозначается erf; erf1=0,8427. Следовательно, ответ равен $(\sqrt{\pi}/2) \cdot 0{,}8427 = 0{,}747$. Эту информацию можно использовать для проверки решений, получаемых здесь графическими и численными методами.

[2]) Хотите верьте, хотите нет, но этот очень точный результат фактически был получен с помощью графика, построенного от руки, и подсчета числа квадратов главным образом на глаз. Откровенно говоря, не всегда удается получить такую высокую точность!

где k — общее число интервалов Δx. На рис. 8.5 показана вычисленная таким способом площадь для интеграла $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

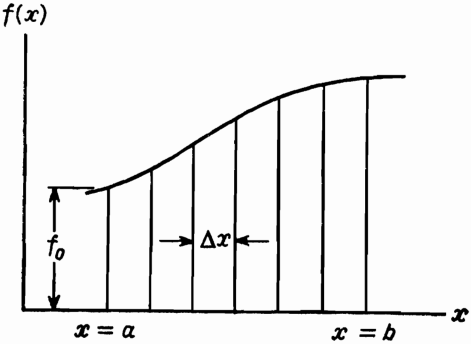


Рис. 8.4.

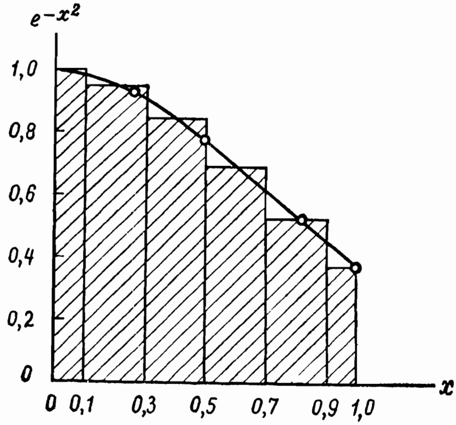


Рис. 8.5.

При использовании только пяти интервалов численный результат будет равен

$$I = 1 \cdot \frac{0,2}{2} + 0,961 \cdot 0,2 + 0,852 \cdot 0,2 + 0,698 \cdot 0,2 + \\ + 0,523 \cdot 0,2 + 0,368 \cdot \frac{0,2}{2} = 0,744.$$

Точность превосходная. Чтобы получить результат, потребовалось лишь несколько минут. Если этот метод понятен, то фактически и не нужно строить графика. Этот метод дает *точный* результат, когда кривая, ограничивающая вычисляемую площадь, является прямой. Высокая точность только что полученного результата частично объясняется тем,

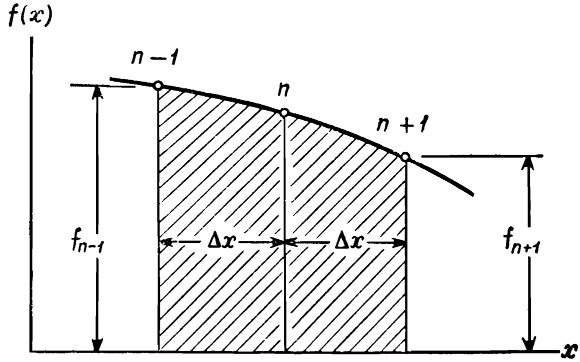


Рис. 8.6

что в интервале (0,1) функция e^{-x^2} отличается от прямой несущественно.

При интегрировании функций, которые изменяются скорее, используются более точные методы аппроксимации. Наиболее широко применяется так называемое правило Симпсона; оно дает точные результаты, когда кривая является параболой. Рассмотрим параболу, изображенную на рис. 8.6. Заштрихованная площадь под кривой в точности равна

$$\left(\frac{f_{n-1}+4f_n+f_{n+1}}{6}\right)2\Delta x = \frac{\Delta x}{3}(f_{n-1}+4f_n+f_{n+1}).$$

Рассмотрим теперь кривую, изображенную на рис. 8.7. Если вначале кривая разделена на k интервалов (в данном случае k должно быть четным числом), то для вычисления площади под кривой можно использовать записанное выше уравнение. Тогда общая площадь под кривой будет равна

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) +$$
$$+ \frac{\Delta x}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \frac{\Delta x}{3}(f_4 + 4f_5 + f_6) +$$
$$+ \ldots + \frac{\Delta x}{3}(f_{k-2} + 4f_{k-1} + f_k) =$$
$$= \frac{\Delta x}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 +$$
$$+ \ldots + 4f_{k-1} + f_k).$$

Возвратимся к предыдущему примеру, т. е. к интегралу $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. Если $k = 4$, то $\Delta x = 0{,}25$ и
$I = \frac{0{,}25}{3} \cdot [1{,}0 + 4 \cdot 0{,}9395 + 2 \cdot 0{,}7795 + 4 \cdot 0{,}5705 + 0{,}368] =$
$= 0{,}748.$

Заметим, что теперь точность несколько выше, хотя использовалось меньшее число точек. При параболической аппрок-

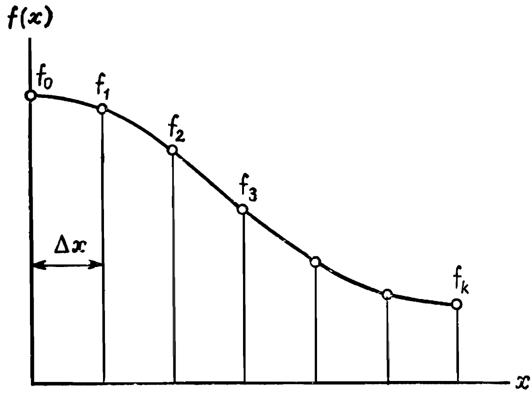


Рис. 8.7

симации требуется выполнять большой объем вычислений на один интервал, но такая же точность достигается при меньшем числе интервалов. Поэтому обычно этот метод оказывается более предпочтительным. Число интервалов выбирается произвольно и зависит от требуемой точности и формы кривой. Интервалы должны быть достаточно малы, с тем чтобы каждый из них можно было бы с приемлемой точностью аппроксимировать параболой. С другой стороны, чем меньше интервалов, тем лучше, поскольку сокращается время вычислений.

8.6. Численные методы решения дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения можно разделить на две группы: уравнения, которые получают при решении задач с начальными условиями, и уравнения, которые получают

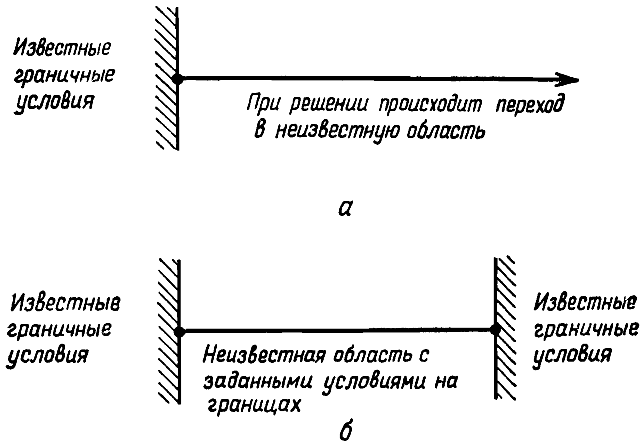


Рис. 8.8. Схема одномерной задачи с начальными условиями (*а*) и одномерной краевой задачи (*б*).

при решении краевых задач. Решение задачи с начальными условиями требует «перехода» из известной области в неизвестную. В краевой задаче требуется найти решение, лежащее внутри области с заданными условиями на границе. На рис. 8.8 приведена схема, поясняющая эти понятия для одномерного случая. Теперь рассмотрим численные методы решения задач этих двух типов.

Задачи с начальными условиями. В основе многих полезных численных методов решения задач с начальными условиями лежит разложение в ряд Тейлора. Допустим, что требуется найти y при условии, что $dy/dx=f(x, y)$ и что задано начальное условие $y=y_0$ при $x=x_0$. Разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$y(x+\Delta x)=y(x)+\frac{dy}{dx}\frac{\Delta x}{1!}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!}+\dots,$$

где Δx — малый интервал. Если обозначить $x_n=x_0+n\Delta x$ и $y_n=y(x_0+n\Delta x)$, то записанная выше формула примет вид

$$y_{n+1}=y_n+\left(\frac{dy}{dx}\right)_n\frac{\Delta x}{1!}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_n\frac{(\Delta x)^2}{2!}\dots.$$

Таким образом, если известны значения переменной y и ее производные в n-й точке, то с помощью этой формулы можно найти значения переменной y и ее производные в $(n+1)$-й точке. Таким путем можно перейти в новую точку. На практике при получении численных аппроксимаций весь ряд не рассматривается и многие члены более высоких порядков опускаются, поскольку обычно Δx — малое число.

В качестве примера решим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}-2y=-x^2$$

относительно $y(x)$ при начальном условии $y=0$ при $x=0$. Пусть Δx принимается равным 0,1. Производные для подстановки в ряд Тейлора имеют вид

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}-2x=4y-2x^2-2x,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2\frac{d^2y}{dx^2}-2=8y-4x^2-4x-2,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=2\frac{d^3y}{dx^3}=16y-8x^2-8x-4,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=2\frac{d^4y}{dx^4},\quad \frac{d^6y}{dx^6}=2\frac{d^5y}{dx^5}\ \text{и т. д.}$$

Разложение в ряд Тейлора дает

$$y_{n+1}=y_n+\left(\frac{dy}{dx}\right)_n\frac{\Delta x}{1!}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_n\frac{(\Delta x)^2}{2!}+\dots,$$

и поэтому для y_1 получаем

$$y_1=y_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\Delta x+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0\frac{(\Delta x)^2}{2}+\dots.$$

В начальной точке $n=0$ имеем $x=0$ и $y_0=0$

$$y_0=0, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=0,$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=0, \qquad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0=-2,$$
$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0=-4, \qquad \left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_0=-8 \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, результат для y_1 равен

$$y_1=0+0\cdot 0{,}1+0\cdot\frac{0{,}01}{2}-2\cdot\frac{0{,}001}{6}-4\cdot\frac{0{,}0001}{24}-8\cdot\frac{0{,}00001}{120},$$
$$y_1=-0{,}000333-0{,}000167-0{,}0000067-\ldots,$$
$$y_1=-0{,}0005067.$$

Теперь, зная y_1 при $x_1=\Delta x$, можно вычислить все производные в точке $n=1$, используя еще раз разложение в ряд Тейлора, но на этот раз в виде

$$y_2=y_1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\frac{\Delta x}{1!}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1\frac{(\Delta x)^2}{2!}+\ldots .$$

При использовании настольной счетной машины этот метод обычно дает довольно точные результаты, но расчеты могут быть очень длительными, если требуется охватить большой интервал значений x. Хотя данный метод иногда и применяется при ручном счете и при использовании настольной счетной машины, в настоящее время основным средством численного решения дифференциальных уравнений являются цифровые вычислительные машины.

Краевые задачи. Разложение в ряд Тейлора — стандартный метод перехода от заданных начальных условий в неизвестную область. Когда рассматривается задача с граничными (краевыми) условиями, для получения приближенного численного решения используется один из наиболее распространенных методов, называемый *коллокацией*. Коллокация заключается в том, что решение выражается через несколько неопределенных параметров. Затем эти параметры определяют из условия, что принятое решение в точности удовлетворяет дифференциальному уравнению в нескольких конкретных точках, число которых равно числу параметров. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$$

при граничных условиях

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Точное аналитическое решение этого уравнения имеет вид

$$y = -\sin x + \frac{2x}{\pi}.$$

Если мы считаем, что точное аналитическое решение найти невозможно, то, используя метод коллокации, можно получить результат, близкий к точному. Решение с неопределенными параметрами можно искать в любом виде. Удобно принять, что решение имеет вид многочлена

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

С учетом граничных условий имеем $d=0$ и $c=-(\pi/2)[(a\pi/2)+ +b]$. Таким образом, осталось определить два параметра (a и b), которые находятся из следующего условия: значения y, полученные с помощью принятого уравнения, совпадают со значениями y, полученными с помощью точного уравнения в двух произвольных точках. В этом случае можно надеяться, что в остальных точках решение принятого уравнения не будет слишком отклоняться от решения точного уравнения. В качестве точек точного совпадения целесообразно выбирать промежуточные точки, одинаково удаленные как друг от друга, так и от крайних точек. В данном случае такими точками являются $x=\pi/6$ и $x=\pi/3$. Предполагаемое решение имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax + 2b.$$

Если рассматривается уравнение $d^2y/dx^2=\sin x$, то при $x= =\pi/6$ и $x=\pi/3$ в точках a и b это уравнение принимает следующий вид:

$$6a\frac{\pi}{6} + 2b = \sin\frac{\pi}{6},$$

$$6a\frac{\pi}{3} + 2b = \sin\frac{\pi}{3}.$$

Решая эти уравнения относительно a и b и, следовательно, относительно c, получаем

$$a = 0.1165, \quad b = 0{,}067, \quad c = -0{,}393;$$

поэтому

$$y = 0{,}1165x^3 + 0{,}067x^2 - 0{,}393x.$$

Это приближенное решение, полученное путем коллокации. Точное решение имеет вид

$$y = -\sin x + 2x/\pi.$$

Эти два решения сопоставлены на рис. 8.9. Как можно видеть, совпадение очень хорошее.

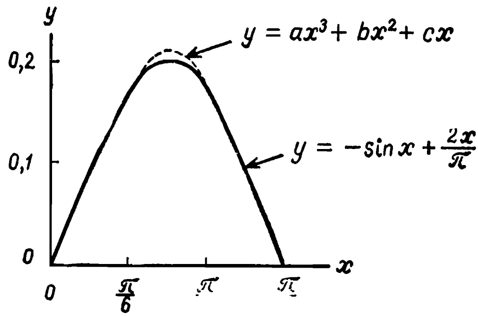


Рис. 8.9.

Разложение в ряд Тейлора и коллокация — это лишь два из большого количества известных численных методов решения дифференциальных уравнений. Другие методы рассматриваются в литературе и изучаются в специальных курсах по численному анализу.

8.7. Введение в исчисление в конечных разностях

С появлением вычислительных машин резко возросло значение раздела математики, который можно назвать *исчислением в конечных разностях*. Дифференциальное уравнение, которое нельзя решить традиционными аналитическими методами, часто можно решить на вычислительной машине, используя приближенное уравнение в конечных разностях. В основном этот метод заключается в следующем. Вместо перехода к пределу, этой обычной операции математического анализа, исходное уравнение оставляется записанным в конечных разностях. Например, производная dy/dx является пределом отношения двух *конечных* разностей $\Delta y/\Delta x$ при Δx, стремящейся к нулю. Если оставить уравнение записанным в конечных разностях, то его можно решить на вычислительной машине.

Основной вопрос, возникающий в данном случае, состоит в следующем. Насколько малым должно быть значение Δx, чтобы получить результаты, близкие к истинному значению dy/dx? Кажется, что ответом будет: как можно меньше, и поэтому Δx нужно брать как можно ближе к нулю. Однако здесь имеют место и другие соображения. Чем меньше выбранное значение Δx, тем больший объем вычислений потребуется, чтобы охватить заданный интервал значений x. Это в свою очередь затрагивает такие вопросы, как стоимость машинного времени и величина погрешности, возникающей в результате ошибок округления. Очевидно, что даже большая вычислительная машина может оперировать с числами, имеющими определенное количество значащих цифр. Кроме того, уже в самих уравнениях, записанных в конечных разностях, как и при разложении в ряд Тейлора, заключена некоторая погрешность, обусловленная отбрасыванием членов высших порядков.

С другой стороны, если взять слишком большое значение Δx, то получим неудовлетворительную аппроксимацию производной dy/dx. Здесь возникает проблема *сходимости*. Кроме того, если значение Δx слишком велико, то может возникнуть проблема *устойчивости*. Это означает, что возможны такие случаи, когда получаемые результаты совершенно не имеют смысла, колеблясь от очень больших до очень малых значений. Конечную разность Δx нужно брать достаточно малой, чтобы обеспечивались условия сходимости и устойчивости, но в то же время это значение должно быть достаточно велико, чтобы можно было избежать слишком больших ошибок округления.

Известны математические методы, используемые для исследований устойчивости уравнений в конечных разностях, однако их рассмотрение выходит за рамки данной книги. Обычно неустойчивость уравнения можно обнаружить даже при беглом взгляде на результаты. Для проверки сходимости обычно значение Δx уменьшают (например, в два раза) и затем проверяют, получается ли такой же результат. Если результаты не зависят от величины интервала Δx, то интервал Δx достаточно мал. При этом считают, что в таком случае результат сходится. В литературе можно найти описание подробных исследований ошибок округления. Если предприняты достаточные меры предосторожности, то при решении обычных задач ошибки округления чаще всего не представляют серьезной проблемы. Основная опасность возникает при вычитании одного числа из другого, в том случае когда эти числа почти равны друг другу. При выполнении этой операции можно легко потерять многие значащие цифры. Если же результат такого вычитания используется в последующих расчетах (умножается или делится на другие числа), то конечный результат может оказаться совершенно неверным. При выполнении сложных вычислений может случиться так, что будет трудно обнаружить, где имеет место операция вычитания, в которой участвуют почти равные числа, поэтому при изучении программы вычислительной машины следует обращать особое внимание на каждую операцию вычитания.

Вернемся теперь снова к конечным разностям. Простейшую аппроксимацию первой производной через конечные разности получаем, отбрасывая в разложении в ряд Тейлора все члены, кроме первого. После перестановки членов получаем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x}.$$

Записанное выражение называется *аппроксимацией по правой разности*. В отличие от него выражение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x}$$

называется *аппроксимацией по центральной разности*. В качестве примера применения этой формулы рассмотрим снова дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 2y - x^2$$

с начальным условием $y=0$ при $x=0$. Беря вместо производной аппроксимацию по правой разности, получаем

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta x}=2y_n-x_n^2.$$

Преобразуя и подставляя $x_n=n\Delta x$, находим

$$y_{n+1}=y_n+(2y_n-n^2\Delta x^2)\,\Delta x.$$

Если, как и ранее, $x=0{,}1$, то в начальной точке $n=0$ имеем $x_0=0$, $y_0=0$, и, следовательно,

$$y_1=0+(0-0)\cdot 0{,}1=0.$$

Повторное применение этой формулы не представляет труда при использовании вычислительной машины, но такой простой пример вполне можно решить и вручную.

$$y_2=0+(0-0{,}01)\cdot 0{,}1=-0{,}001,$$
$$y_3=-0{,}001+(-0{,}002-0{,}04)\cdot 0{,}1=-0{,}0052,$$
$$y_4=-0{,}0052+(-0{,}0104-0{,}09)\cdot 0{,}1=-0{,}01524,$$
$$y_5=-0{,}01524+(-0{,}03048-0{,}16)\cdot 0{,}1=-0{,}034288.$$

Обычно при таком подходе точность результатов в начале вычислений невысока. При $x=0{,}5$ точный аналитический результат равен $y_5=-0{,}055$. Однако при больших значениях x, когда начальная ошибка становится менее существенной, точность повышается. Обычно аппроксимация по центральной разности точнее. Однако, поскольку ее нельзя использовать для получения y_1, вначале можно взять аппроксимацию по правой разности, а затем — по центральной. При использовании этой методики на цифровой вычислительной машине были получены следующие результаты при $x=0{,}50$:

Δx	y
0,10	—0,0906
0,02	—0,0619
0,01	—0,0582

Точное значение y при $x=0{,}5$ равно —0,055. При $x=2{,}0$ получены следующие результаты:

Δx	y
0,10	—12,7
0,01	—10,6

Здесь точное значение y равно —10,4. Таким образом, при $\Delta x=0,01$ значение y найдено с погрешностью 2%. Заметим, что при $\Delta x=0,10$ еще нет сходимости результата к истинному значению. Проблемы устойчивости редко возникают в простейших задачах такого рода. Ошибки округления, обусловленные отбрасыванием членов разложения в ряд Тейлора, мало влияют на сходимость при больших значениях Δx. Величина отбрасываемых членов будет порядка $(\Delta x)^2$. Если $\Delta x=0,10$, то для нахождения y при $x=2,0$ требуется выполнить 20 вычислений, каждое с возможной ошибкой порядка $(\Delta x)^2=0,01$. Общая возможная накапливаемая ошибка составляет 0,20. Получаемая суммарная ошибка примерно в 10 раз больше указанной. Это свидетельствует о том, что бо́льшая доля ошибки обусловлена отсутствием сходимости. Известны более точные, но в то же время и более сложные аппроксимации первой производной, которые подробно рассматриваются в большинстве учебников по численному анализу.

Кроме того, существуют различные способы аппроксимации конечными разностями производных более высоких порядков. Для второй производной имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)_n=\frac{d}{dx}\,\frac{y_{n+1/2}-y_{n-1/2}}{\Delta x},$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_n=\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta x}-\frac{y_n-y_{n-1}}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x}=$$

$$=\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Если y_n и y_{n-1} известны, то записанная выше формула позволяет найти y_{n+1}. Применяя эту формулу повторно, получаем все значения y. Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x+y$$

с начальными условиями $y=0$ и $dy/dx=0$ при $x=0$. Используя записанную выше аппроксимацию второй производной, это уравнение можно представить как

$$\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{\Delta x^2}=x_n+y_n.$$

Решая его относительно y_{n+1}, получаем

$$y_{n+1}=2y_n-y_{n-1}+(n\Delta x+y_n)(\Delta x)^2.$$

Чтобы начать решение, заметим, что $x_0=y_0=0$, и поскольку $(dy/dx)_0=0$, то, используя уравнение первого порядка в правых разностях, получаем $y_1=y_0=0$. Таким образом,

$$y_2=2y_1-y_0+(\Delta x+y_1)(\Delta x)^2,$$
$$y_3=2y_2-y_1+(2\Delta x+y_2)(\Delta x)^2$$

и т. д. Получены также и другие, более точные (и в то же время более сложные) аппроксимации производной второго порядка. В книгах по численному анализу приводятся также аппроксимации производных более высоких порядков. Приведенные выше уравнения в конечных разностях часто используются для решения инженерных задач; их применение иллюстрируется одним из примеров, рассматриваемых далее в этой главе.

Численное решение дифференциальных уравнений в качестве первого шага предполагает составление соответствующей аппроксимации производных через конечные разности. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=f(x).$$

Производные аппроксимируются следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{(\Delta x)^2} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2\Delta x}.$$

Следовательно,

$$\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{(\Delta x)^2}+a\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2\Delta x}+by_n=f(x_n).$$

Решая это уравнение относительно y_{n+1}, получаем

$$y_{n+1}=\frac{2y_n-y_{n-1}+(a\Delta x/2)\,y_{n-1}+f(x_n)-by_n\Delta x^2}{1-(a\Delta x/2)}.$$

Таким образом, если известны значения x_n и y_n, то с помощью этого выражения можно найти x_{n+1} и y_{n+1}. Многократно используя это выражение, получаем все требуемые соотношения между x и y. Такие многократно применяемые выражения называются *рекуррентными*.

Заметим, что для вычисления новой, $(n+1)$-й точки необходимо знать всего две точки: n-ю и $(n-1)$-ю. Это приводит к постановке вопроса о начале процесса. В задачах с начальными условиями необходимую информацию дают начальные условия в точке $x=0$, однако, поскольку возможных случаев слишком много, все их рассмотреть нельзя. В качестве примера допустим, что в полученном выше общем уравнении при $x=0$

$$y=d, \qquad \frac{dy}{dx}=e.$$

Теперь из дифференциального уравнения получаем

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=f(0)-bd-ae.$$

Полагая

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{y_1-y_0}{\Delta x},$$

можно показать, что

$$y_1=y_0+\frac{\Delta x}{a}\left[f(0)-by_0-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0\right].$$

Это выражение позволяет вычислить y_1, а для вычисления последующих точек можно использовать общее рекуррентное соотношение.

Когда рассматривается *краевая задача*, то в отличие от *задачи с начальными условиями* здесь нельзя получить рекуррентного соотношения для конечных разностей, с помощью которого вычисления начинались бы так, как было показано выше. Одним из способов решения таких уравнений в конечных разностях является метод проб и ошибок. Этот метод состоит в следующем. Если на каждой границе области, представляющей интерес, задано одно граничное условие, то производится *угадывание* второго граничного условия (например, первой производной) на одной из сторон. Подставляя это предполагаемое значение в первое рекуррентное выражение, определяем, соответствует ли полученный результат другому граничному условию. В данном случае сохраняют силу также все сделанные ранее замечания относительно решения трансцендентных уравнений методом проб и ошибок.

8.8. Замечания по поводу аналоговых вычислений

Предыдущий материал был посвящен главным образом *численным методам*, которые отличаются от *аналоговых вычислений*. Численные методы лучше всего подходят при использовании цифровых вычислительных машин. Однако в тех случаях, когда численные решения по каким-либо причинам получить трудно, большое значение приобретают аналоговые методы. Аналоговые вычисления основаны на том, что дифференциальные уравнения для многих типов задач аналогичны уравнениям, описывающим электрические цепи постоянного тока. Эти задачи можно формулировать как задачи электротехники, решать их на аналоговой вычислительной машине, а полученные результаты интерпретировать как величины, характеризующие исходную ситуацию. Вследствие недостатка места мы не имеем возможности развить далее этот чрезмерно упрощенный взгляд на аналоговые вычисления. Читатель, интересующийся данным вопросом, отсылается к литературе, рекомендуемой для чтения в конце главы

8.9. Пример: плавающий помидор

Постановка задачи. В гл. 3 при анализе процесса изобретательства рассматривалась задача отделения зеленых помидоров от созревших. В основе одной из предложенных схем лежат различные плотности созревшего и зеленого помидоров. Экспериментальная проверка показала, что зеленые помидоры плавают в воде, а созревшие тонут. При проектировании установки, работающей на этом принципе, необходимо вычислить время, требуемое для того, чтобы зеленый помидор, находящийся в резервуаре с водой, поднялся на поверхность, будучи погруженным в воду на 60 *см*. Для проверки разрабатываемого метода должен использоваться выбранный наудачу помидор. Был взят зеленый помидор весом 135 *Г* и объемом 140 *см*^{3} Сколько времени потребуется помидору, чтобы всплыть с глубины 60 *см*?

Определение задачи. Помидор весом 135 *Г* и объемом 140 *см*^{3}, находящийся в резервуаре с водой, поднимается из состояния покоя с глубины 60 *см*. Сколько времени потребуется для того, чтобы этот помидор всплыл на поверхность?

Построение модели. В этой задаче большинство вопросов, связанных с построением модели, тривиально, за исключением формы помидора. Помидоры нельзя считать круглыми. Полагать, что помидор имеет форму шара, безусловно, неверно, но, по-видимому, для начала целесообразно принять именно это допущение. Разумеется, при отсутствии точных или статистических данных о действительной форме помидоров нельзя принять другого допущения. В этом случае получаем модель шара, находящегося в спокойной несжимаемой жидкости.

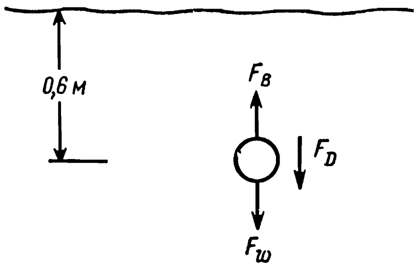


Рис. 8.10. Силы, действующие на погруженный в воду помидор.

Использование физических принципов. Здесь нужно применить второй закон Ньютона. Посмотрим на рис. 8.10. Вначале на помидор действуют две внешние силы: сила тяжести (направленная вниз) и выталкивающая сила (направленная вверх). Выталкивающая сила равна

$$F_B = \rho_w g \mathcal{V}.$$

где ρ_w — плотность воды, $Г \cdot сек^2/см^4$; g — ускорение силы тяжести, $см/сек^2$; $\mathcal{V}$ — объем помидора, $см^3$.

После того как помидор начинает двигаться, появляется еще одна внешняя сила, обусловленная гидродинамическим сопротивлением воды. Выраженная через коэффициент гидродинамического сопротивления, эта сила равна

$$F_D = C_D \frac{\rho_w V^2}{2} A,$$

где V — скорость движения помидора, а A — площадь его поперечного сечения. Применяя второй закон Ньютона, получаем

$$F_B - F_w - F_D = ma,$$

$$\rho_w g \mathcal{V} - \rho_T g \mathcal{V} - C_D \frac{\rho_w V^2}{2} A = \rho_T \mathcal{V} a,$$

где ρ_T— плотность помидора, а a — его ускорение. Проверяем размерность

$$\underbrace{\frac{г \cdot сек^2}{см^4} \cdot \frac{см}{сек^2} \cdot см^3}_{г} - \underbrace{\frac{г \cdot сек^2}{см^4} \cdot \frac{см}{сек^2} \cdot см^3}_{г} - \underbrace{\frac{г \cdot сек^2}{см^4} \cdot \frac{см^2}{сек^2} \cdot см^2}_{г} =$$

$$= \underbrace{\frac{г \cdot сек^2}{см^4} \cdot см^3 \cdot \frac{см}{сек^2}}_{г}.$$

После выполнения несложных алгебраических выкладок получаем

$$a = \left(\frac{\rho_w}{\rho_T} - 1 \right) g - \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_w}{\rho_T} \frac{1}{D} V^2.$$

Поскольку

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2},$$

решение этого уравнения даст искомое соотношение между положением помидора и временем, за которое он всплывет.

Построение модели. Прежде чем продолжать вычисления, следует принять некоторые дополнительные допущения. Часто находящиеся в жидкости частицы, которые получают возможность свободно опускаться или подниматься, очень быстро достигают конечной скорости. Таким образом, бо́льшую часть своего пути они проходят с этой постоянной конечной скоростью (ускорение $a=0$). Поэтому весьма логично допустить, что такие условия возможны и в данном случае. Другими словами, можно предположить, что гидродинамическое сопротивление мало, и пренебречь им. Разумеется, принятие каждого из этих допущений должно быть обосновано. Допустим вначале, что гидродинамическое сопротивление пренебрежимо мало. На этом допущении основаны приведенные далее вычисления.

Вычисления. Если гидродинамическое сопротивление пренебрежимо мало, то полученное нами уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\rho_w}{\rho_T} - 1\right) g = a = \left(\frac{1,0}{0,96} - 1\right) \cdot 980 \approx 40 \ \textit{см/сек}^2.$$

При постоянном ускорении и при $x=60$ *см*

$$t = \sqrt{2x/a} = \sqrt{120/40} = 1,73 \ \textit{сек}.$$

Теперь можно вычислить величину гидродинамического сопротивления и показать, что им действительно можно

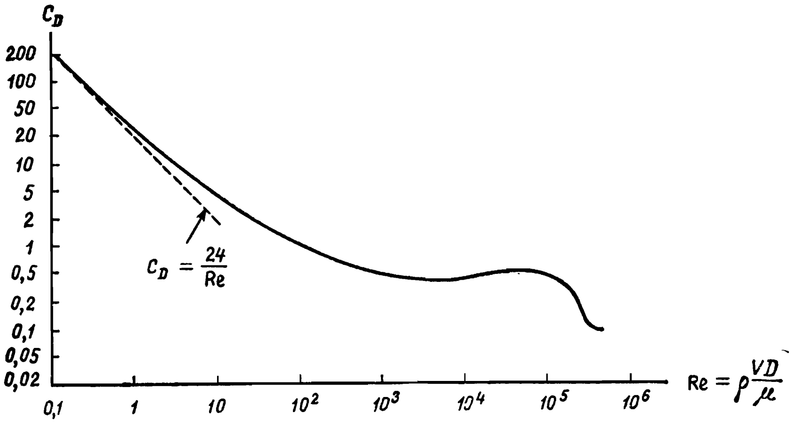


Рис 8.11. Коэффициент гидродинамического сопротивления для шара.

пренебречь. При $x=60$ *см* и $t=1,73$ *сек* средняя скорость помидора составляет 34 *см/сек*. Чтобы получить коэффициент гидродинамического сопротивления, нам нужно знать число Рейнольдса (рис. 8.11). Число Рейнольдса $\rho VD/\mu$ нужно получить, исходя из диаметра предположительно шарообразного помидора. Шар объемом 140 *см*^{3} имеет диаметр 6,45 *см*. Отсюда находим число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{101,5 \cdot 10^{-5} \cdot 34 \cdot 6,45}{0,64 \cdot 10^{-5}} = 0,358 \cdot 10^5.$$

Проверяем размерность

$$\frac{\textit{Г} \cdot \textit{сек}^2}{\textit{см}^4} \cdot \frac{\textit{см}}{\textit{сек}} \cdot \frac{\textit{см} \cdot \textit{см}^2}{\textit{Г} \cdot \textit{сек}} = 1.$$

При таком значении числа Рейнольдса получаем $C_D=0{,}50$. Таким образом, *средняя* сила гидродинамического сопротивления равна

$$F_D = C_D \frac{\rho V^2}{2} A = 0{,}50 \cdot \frac{101{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 34^2}{2} \cdot \frac{6{,}45^2}{4},$$

$$F_D \approx 3\ \Gamma.$$

Результирующая двух сил — силы тяжести и выталкивающей силы — равна

$$g(\rho_w - \rho_T)\mathcal{V}^{\circ} = (1{,}0 - 0{,}96) \cdot 140 \approx 5{,}6\ \Gamma.$$

Очевидно, что силой гидродинамического сопротивления пренебречь нельзя, необходимо построить новую, более сложную модель.

Построение модели. Можно принять второе упрощающее допущение: помидор очень быстро достигает конечной скорости. В этом случае можно пренебречь расстоянием, пройденным за начальный период движения с ускорением, и длительностью этого периода. На этом допущении основаны приведенные далее вычисления.

Вычисления. Достигнуто равновесное состояние; следовательно, силы уравновешены, и $a=0$. Таким образом, уравнение движения имеет вид

$$\left(\frac{\rho_w}{\rho_T} - 1\right) g = \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_w}{\rho_T} \frac{1}{D} V^2.$$

Очевидно, что, пока не известно значение C_D, нельзя вычислить V, и наоборот. Заметим, однако, что в интервале чисел Рейнольдса, ожидаемых в этой задаче, значение C_D почти постоянно. Следовательно, можно принять некоторое значение C_D, вычислить V, а затем проверить значение C_D с помощью графика. Затем, если потребуется, можно принять второе значение C_D. В данном случае, полагая $C_D=0{,}45$, получаем $V=27$ *см/сек*. При скорости $V=27$ *см/сек* число Рейнольдса равно $2{,}8 \cdot 10^4$. Соответствующее значение C_D, взятое из графика, равно 0,45. Следовательно, решение получено.

При постоянной конечной скорости 27 *см/сек* время, требуемое для всплытия помидора с глубины 60 *см*, равно $t=2{,}22$ *сек*. Теперь необходимо проверить допущение о том, что временем движения с ускорением можно пренебречь.

Начальная сила, воздействующая на помидор, равна лишь разности между выталкивающей силой и весом помидора и составляет 5,6 *Г*. Когда помидор начинает движение, направленная вверх результирующая сила, действующая на помидор, уменьшается. Для оценки примем, что максимальная сила (равная 5,6 *Г*) действует и при движении с ускорением. Тогда время, необходимое для сообщения помидору, находившемуся в состоянии покоя, скорости 27 *см/сек*, будет равно

$$a=\frac{F}{m}=\frac{5,6}{135}\cdot 980=40=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{27}{t},$$

$$t=0,67 \ \textit{сек}.$$

Это минимальное значение, и даже им вряд ли можно пренебречь, если его сравнить с полным временем движения, равным 2,22 *сек*. Таким образом, временем движения с ускорением пренебречь нельзя, если нас не удовлетворяет ответ с погрешностью около 25%.

Построение модели. Очевидно, что в данном случае не приемлемо ни одно из принимавшихся ранее упрощающих допущений (см. также задачу 8.3). Необходимо вернуться к полному уравнению:

$$a=\left(\frac{\rho_w}{\rho_T}-1\right)g-\frac{3}{4}C_D\frac{\rho_w}{\rho_T}\frac{1}{D}V^2.$$

Подставляя имеющиеся численные значения, получаем

$$a=40-0,121C_DV^2.$$

Поскольку в правой части встречается V, удобно записать a как dV/dt. Тогда получим дифференциальное уравнение, связывающее скорость и время

$$\frac{dV}{dt}=40-0,121C_DV^2.$$

Если известна скорость как функция времени, то, поскольку $x=\int V\,dt$, можно найти также соотношение между расстоянием и временем; это и будет искомым решением.

Чтобы из записанного нами уравнения получить зависимость между скоростью и временем, необходимо построить график. Для этого заметим, что

$$\int \frac{dt}{dV} dV = t.$$

Таким образом, на графике для $dt/dV = 1/(dV/dt)$ как функции V площадь под кривой даст время. Порядок работы таков: 1) берем значения V через интервалы от нуля до конечного значения $V=27$ *см/сек*; 2) для каждого значения V вычисляем число Рейнольдса и по графику определяем значение C_D; 3) используя записанное выше уравнение, вычисляем dV/dt; 4) строим график для dt/dV как функции V; 5) вычисляем площадь под кривой, чтобы найти время как функцию V для различных скоростей (время, в течение которого помидор имеет скорость V_1, численно равно площади A под кривой между точками $V=0$ и $V=V_1$); 6) теперь, когда известна зависимость скорости V от времени t, строим график для V как функции t и находим $x = \int V\, dt$.

V, *см/сек*	$\mathrm{Re} \times 10^{-4}$	C_D	dV/dt	dt/dV
0	0	0	39,3	0,0254
3,0	0,32	0,40	39,0	0,0256
6,0	0,64	0,37	37,8	0,0264
9,0	0,96	0,40	35,4	0,0283
12,0	1,28	0,40	32,3	0,0310
15,0	1,60	0,42	27,4	0,0365
18,0	1,92	0,45	21,0	0,0476
21,0	2,24	0,45	14,6	0,0675
24,0	2,56	0,45	7,0	0,143
27,0	2,80	0,45	0	∞

По этим данным построен график на рис. 8.12. Здесь показаны также площади, соответствующие отдельным промежуткам времени. Получены следующие результаты:

V, *см/сек*	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
t, *сек*	0	0,078	0,158	0,241	0,331	0,434	0,552	0,722	1,012	

По этим данным построен график, изображенный на рис. 8.13. Вычисляя с его помощью расстояние, получаем

t, *сек*	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
x, *см*	0	0,73	3,04	6,40	10,57	15,25	20,17	25,66

Через 1,4 *сек* скорость становится равной 25,7 *см/сек* и далее асимптотически приближается к значению 27 *см/сек*. Таким образом, если допустить, что после этого момента

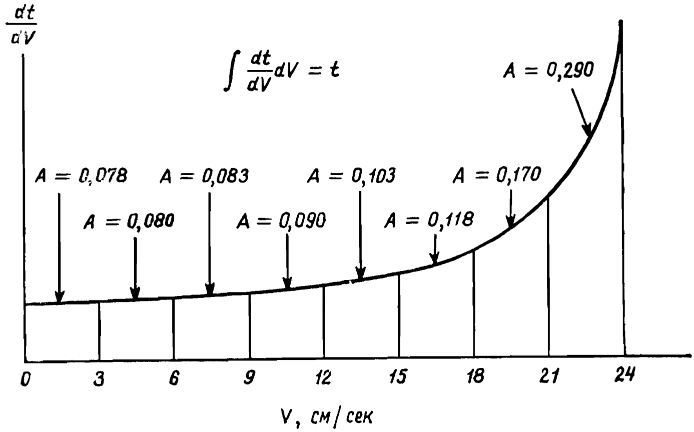


Рис. 8.12.

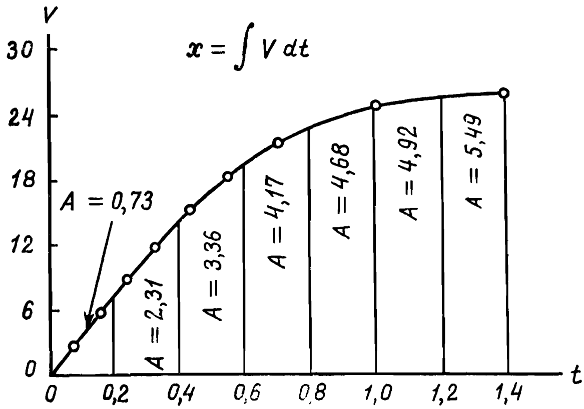


Рис. 8.13.

скорость постоянна и равна, например, 25,7 *см/сек*, то погрешность будет невелика. Оставшееся расстояние равно 60—25,7=34,3 *см*, на преодоление которого при скорости

$V=27$ *см/сек* потребуется 1,28 *сек*. Таким образом, при $x=$ $=60$ *см* общее время составляет $1{,}28+1{,}40=2{,}68$ *сек*.

Оценка и обобщение. Полученный результат имеет почти максимальную точность, которую можно получить при выборе коэффициента гидродинамического сопротивления, соответствующего шару. Очевидно, что помидор не является шаром, и можно ожидать, что фактический коэффициент гидродинамического сопротивления будет несколько выше. Поэтому вычисленное время 2,68 *сек*, по-видимому, будет минимальным.

Подготовку сообщения о результатах анализа предлагаем читателю выполнить самостоятельно. Кроме того, читателю рекомендуется решить задачи 8.2, 8.3 и 8.6.

8.10. Пример: задача о балке

Постановка задачи. Необходимо рассчитать консольную балку, несущую статическую, линейно убывающую нагрузку, как это показано на рис. 8.14. Производственные возможности не позволяют использовать пустотелую балку

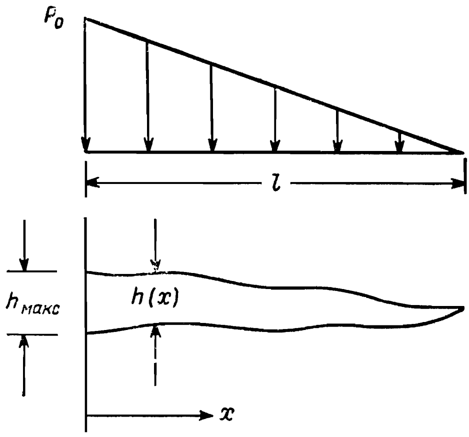


Рис. 8.14.

(трубчатой формы). Ширина балки L значительно превышает ее длину l, поэтому с учетом равномерности нагрузки балки по ширине задача является двумерной. Балка должна быть рассчитана таким образом, чтобы произведение веса балки на максимальный прогиб было минимальным.

Определение задачи. Эта задача была довольно хорошо сформулирована при ее постановке, что не всегда имеет место. Наша цель состоит в определении такой формы нагруженной консольной балки, изображенной на рисунке, чтобы значение $\delta_m W$ было минимальным, где δ_m — максимальный прогиб, а W — общий вес балки. (Этот критерий является необычным, однако необычность не должна пугать инженеров.)

Построение модели. Так как $h_0 = h_{\text{макс}}$ составляет небольшую долю l, то в данном случае будет приемлема теория обычной упругой балки. На данном этапе нет необходимости принимать других допущений.

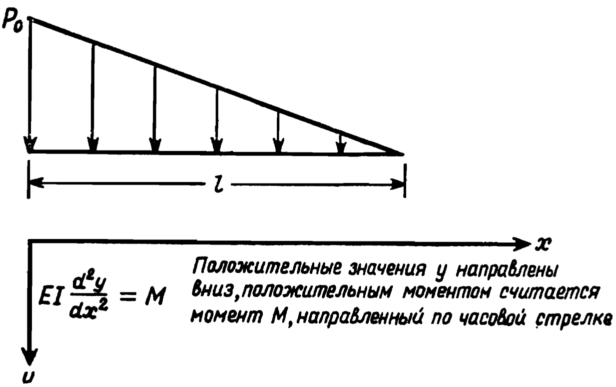


Рис. 8.15.

Использование физических принципов. Обратимся к рис. 8.15. Основное уравнение для прогиба балки имеет вид

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M.$$

Изгибающий момент M в точке x для нагруженной балки с треугольным профилем нагрузки равен

$$M = \frac{P_0 L\,(l-x)}{l}\,\frac{(l-x)}{2}\,\frac{(l-x)}{3} = \frac{P_0 L\,(l-x)^3}{6l}.$$

Момент инерции I для прямоугольного поперечного сечения высотой h равен

$$I=\frac{1}{12}Lh^3.$$

Таким образом, уравнение для δ_m принимает вид

$$\delta_m=\int_0\int_0^x\frac{d^2y}{dx^2}\,dx\,dx=\frac{1}{E}\,\frac{P_0L}{6l}\,\frac{12}{L}\int_0^l\int_0^x\frac{(l-x)^3}{h^3}\,dx\,dx=$$

$$=\frac{2P_0}{El}\int_0^l\int_0^x\frac{(l-x)^3}{h^3}\,dx\,dx.$$

Граничными условиями являются

$$x=0,\quad y=dy/dx=0.$$

Вес балки задается интегральным уравнением

$$W=\rho L\int_0^l h\,dx.$$

Задача состоит в нахождении такой высоты h, при которой значение $\delta_m W$ минимально.

Вычисления. Часто при решении сложных задач, особенно в областях, с которыми инженер давно не сталкивался, бывает целесообразно найти решение для простейшего случая, прежде чем браться за всю задачу в целом. Такой способ позволяет инженеру уяснить задачу и найти способ ее решения, не рассматривая сразу всех усложняющих факторов. Например, в данном случае было бы полезно вначале рассмотреть балку с постоянным поперечным сечением только для того, чтобы лучше уяснить себе рассматриваемую задачу. В этом случае $h=h_0=\text{const}$ и уравнения для δ_m и W легко интегрировать. Получаем следующие результаты:

$$\delta_m=\frac{2}{5}\,\frac{P_0l^4}{Lh_0^3E},\quad W=\rho h_0lL.$$

Произведение $\delta_m W$ равно

$$\delta_m W=\frac{2}{5}\,\frac{\rho P_0l^5}{Eh_0^2}.$$

Проверяем размерность:

$$\textit{м}\cdot\textit{кГ}=\frac{\textit{кГ}\cdot\textit{кГ}\cdot\textit{м}^5\cdot\textit{м}^2}{\textit{м}^3\cdot\textit{кГ}\cdot\textit{м}^2\cdot\textit{м}}\longrightarrow\textit{м}\cdot\textit{кГ}.$$

Теперь можно найти решение для несколько более сложного случая, полагая, что продольное сечение балки имеет треугольную форму, т. е.

$$h = h_0 \frac{l-x}{l}.$$

В данном случае путем интегрирования также легко найти значения δ_m и W. Получаем следующие результаты:

$$\delta_m = \frac{P_0 l^4}{ELh_0^3}, \quad W = \frac{1}{2} \rho h_0 l L,$$

$$\delta_m W = \frac{1}{2} \frac{\rho P_0 l^5}{h_0^2 E}.$$

Внимательный читатель, возможно, заметил, что на данном этапе можно получить несколько более общее решение, если принять, что высота балки является степенной функцией

$$h = h_0 \frac{(l-x)^n}{l},$$

где n — неизвестный множитель, который нужно найти путем оптимизации значения $\delta_m W$. Решение, полученное в таком виде, не дает абсолютного оптимума, но мы получили оптимальную степенную функцию, что является уже шагом вперед. При решении инженерных задач часто бывает невозможно найти абсолютный оптимум и инженеры вынуждены удовлетворяться частичным оптимумом, дающим наилучший достижимый результат. Используя степенную функцию, получаем

$$\delta_m = \frac{2P_0 l^4}{Ehh_0^3} \frac{1}{5-3n},$$

где $n \neq \frac{4}{3}$ и $n \neq \frac{5}{3}$. (Почему?) Вес равен

$$W = \frac{\rho h_0 l}{n+1}, \quad n \neq -1.$$

Произведение, которое нужно минимизировать, равно

$$\delta_m W = \frac{2P_0 l^5}{Eh_0^2} \frac{1}{(5-3n)(n+1)}, \quad n \neq -1, \ \frac{4}{3}, \ \frac{5}{3}.$$

Значение $\delta_m W$ будет минимальным, когда произведение $(5-3n)(n+1)$ максимально. Полагая

$$\frac{d}{dn}(5-3n)(n+1) = 0,$$

получаем $n=1/3$. Таким образом, оптимальной степенной функцией является

$$h=h_0\left(\frac{l-x}{l}\right)^{1/3}.$$

Искомое произведение равно

$$\delta_m W=\frac{3}{8}\frac{P_0 l^2\rho}{Eh_0^2}.$$

Оценка и обобщение. Оптимум найден, и, хотя, по-видимому, это все-таки еще не настоящий оптимум, полученный результат, безусловно, дает хорошее представление о наилучшей форме балки, удовлетворяющей условиям (ограничениям) задачи. Нам удалось получить наилучшую

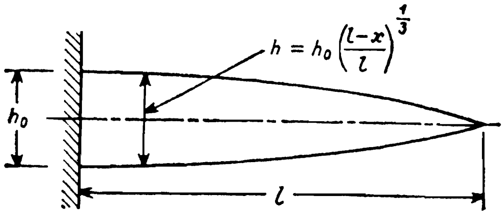


Рис. 8.16.

степенную функцию, а это уже немало. Полученная форма балки изображена на рис. 8.16.

Исследование полученных результатов дает некоторые дополнительные данные. Чтобы значение $\delta_m W$ было минимальным, величина $P_0 l^2\rho/Eh_0^2$ также должна быть как можно меньшей. Значения P_0 и l фиксированы, а ρ и E зависят

Таблица 8 2

Значения E/ρ для некоторых материалов

Материал	E/ρ, 10^6 *см*
Бериллий	1700
Al_2O_3	1000
TiC	660
Алюминий	280
Сталь	280
Нержавеющая сталь марки 301	250
Медь	150
Свинец	38

от выбранного материала. Отсюда можно сделать вывод, что наилучший материал будет иметь минимальное значение ρ/E, или максимальное значение E/ρ. В табл. 8.2 приводятся округленные значения E/ρ для некоторых материалов.

Чтобы минимизировать $P_0 l^2 \rho / E h_0^2$, балка должна быть как можно толще. Таким образом, высоту h_0 нужно брать настолько большой, насколько это позволяет предел $h_{\text{макс}}$.

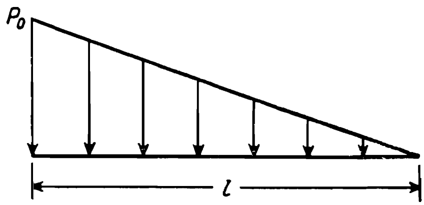


Рис. 8.17.

Этим задается ограничение, налагаемое на предел текучести материала. Изгибающий момент будет максимальным в точке $x=0$, где

$$M_0 = P_0 l^2/6.$$

Таким образом, максимальное напряжение будет равно

$$S_{\text{макс}} = M_0 h_0/2I = P_0 l^2/L h_0^2.$$

Выбранные размеры должны быть такими, чтобы удовлетворялось это условие.

Далее приводится отчет о результатах этого анализа, умещающийся на одной странице.

Задача. Найти форму массивной сплошной консольной балки, способной выдержать изображенную на рисунке распределенную нагрузку, при условии, что значение $\delta_m W$ будет минимальным.

Решение. Произведение, которое нужно минимизировать, имеет вид

$$\delta_m W = \left[\frac{2P_0 \rho L}{El} \int_0^l \int_0^x \frac{(l-x)^3}{x^3}\, dx\, dx \right] \left[\int_0^l h\, dx \right].$$

Полагая, что решение имеет вид степенной функции $h=h_0[(l-x)/l]^n$, получаем оптимальный результат $n=1/3$ и

$$\delta_m W=\frac{3P_0 l^2\rho}{8Eh_0^2}.$$

Следует выбрать материал, удовлетворяющий соотношению $S_{макс}>P_0 l^2/h_0^2 L$ и характеризующийся минимальным значением ρ/E.

8.11. Краткие выводы

Эта глава является введением в численный анализ; она знакомит читателя с методами получения численных результатов в тех случаях, когда применение обычных аналитических методов невозможно.

Графические и численные методы, а также методы решения уравнений на вычислительных машинах следует считать столь же важными и полезными, как и любые другие методы. Действительно, в реальных инженерных задачах чаще получают уравнения, требующие численных решений, чем уравнения, которые имеют аналитические решения в явном виде. Те студенты, которые хотят находиться на передовых рубежах своей профессии, должны в качестве факультативного предмета выбрать численный анализ либо изучать его самостоятельно. Некоторые книги, которые могут помочь в изучении этого предмета, приводятся в списке рекомендуемой литературы.

В процессе инженерного анализа после выполнения вычислений необходимо оценить полученные результаты с точки зрения их соответствия поставленной задаче. Кроме того, необходимо изучить, какая новая информация содержится в полученных результатах. Их необходимо обобщить и исследовать. Наконец, для того чтобы полученные результаты вообще имели ценность, их нужно передать по назначению. Поэтому в следующей главе будет сосредоточено внимание на вопросах оценки, обобщения и передачи результатов.

Задачи

8.1. Используя цифровую вычислительную машину, найдите решение уравнения $\sin x=x^2$.

8.2. Используя цифровую вычислительную машину, найдите решение уравнения движения помидора в задаче, рассмотренной в данной главе.

8.3. Закон Стокса для гидродинамического сопротивления шара справедлив при числах Рейнольдса, меньших 1. В этом случае гидродинамическое сопротивление равно 24/Re. Полагая, что в примере, рассмотренном в этой главе, помидор находится в условиях, при которых справедлив закон Стокса, решите уравнение его движения. (В данном случае уравнение имеет аналитическое решение.) Покажите, что допущение о справедливости закона Стокса неприемлемо.

8.4. Используя цифровую вычислительную машину, найдите оптимальное значение n в задаче о балке рассмотренной в данной главе.

8.5. Используя цифровую вычислительную машину, найдите максимальный прогиб балки с треугольным продольным профилем $h=h_0[(l-x)/l]$. Для этого используйте приведенную в этой главе аппроксимацию второй производной через конечные разности.

8.6. Помидор, размер и вес которого указаны в примере, рассмотренном в данной главе, использовался в реальном эксперименте. Потребовалось 4,3 *сек*, чтобы помидор, находившийся в состоянии покоя, всплыл с глубины 0,6 *м*. Вычислите силу гидродинамического сопротивления для этого помидора.

8.7. Найдите значение интеграла $\int_0^2 (x^3-2x^2)dx$: 1) аналитическим методом; 2) графическим методом; 3) численным методом с помощью цифровой вычислительной машины.

8.8. Найдите решение уравнения $ln\ x=x$: 1) аналитическим методом; 2) графическим методом; 3) с помощью цифровой вычислительной машины.

8.9. Решите следующие дифференциальные уравнения, используя численные методы по вашему выбору:
1) $dy/dt=2y^2+y$; $y=1$ при $t=0$; найти $y(t)$ при $0<t<2$;
2) $d^2y/dt^2=y^2+2y$; $y=1$ при $t=0$; $dy/dt=0$ при $t=0$; найти $y(t)$ при $0<t<1$; 3) $2d^2y/dt^2+dy/dt=4ty$; $d^2y/dt^2=dy/dt$ при $t=0$; найти $y(t)$ при $0<t<4$.

ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ

1. Crandall S. H., Engineering Analysis, McGraw-Hill, New York, 1956.
   Превосходное расширенное изложение теоретических основ численного анализа.
2. Dusinberri G. M., Heat Transfer Calculations by Finite Differences, International Textbook Co., Scranton, Pa., 1961.
   Хороший пример применения численного анализа в области теплотехники.
3. Hildebrand F. B., Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1956.
4. James M. L., Smith G N., Wolford J. C., Analog and Digital Methods of Engineering Analysis, International Textbook Co., Scranton, Pa., 1965.
   Хорошая книга для начального знакомства с аналоговыми и дискретными вычислениями
5. Pennington R. H., Introductory Computer Methods and Numerical Analysis, Macmillan, New York, 1965.
   Превосходное введение в численные методы решения задач на вычислительных машинах.
6. Truitt T. D., Rogers A. E., Basics of Analog Computers, John F. Rider, Publisher, New York, 1960.
   Элементарное введение в технику аналоговых вычислений.

ГЛАВА 9

ОЦЕНКА, ОБОБЩЕНИЕ И ВЫДАЧА РЕЗУЛЬТАТОВ

9.1. Оценка

Этап вычислений завершается получением искомого числового результата или результата в символическом виде (в форме математического выражения). Полученный ответ абсолютно справедлив только в рамках данной модели. Он получен на основе построенной почти в начале процесса инженерного анализа *модели* конкретно сформулированной задачи. На данном этапе задача состоит в том, чтобы определить, как найденный результат согласуется с реальной действительностью.

Этот вопрос имеет два аспекта. Прежде всего необходимо оценить, в какой степени результат, полученный на модели, совпадает с фактическими данными. Если эксперимент не проводится, то, разумеется, истинное соответствие определить невозможно. Однако часто даже числовой результат проливает свет на справедливость некоторых из принятых допущений, и если он получен, то целесообразно проверить различные допущения, чтобы убедиться хотя бы в том, что найденный ответ согласуется с ними. Конечно, бывает и так, что принимаются неудовлетворительные допущения и все же полученный результат согласуется с ними. Однако во многих случаях полученные ответы и принятые допущения оказываются несовместимыми. Такого рода ошибку необходимо обнаруживать на этапе оценки.

Вторая сторона этапа оценки связана с проверкой соответствия полученного результата исходному неопределенному вопросу (рис. 9.1). Вначале от таких вопросов, как: «будет ли данное устройство работать?» или «не будет ли температура слишком высокой?», нам нужно было перейти к вопросам типа: «какой будет длина?» или «дано то-то и то-то, при какой температуре устройство будет работать?». Теперь мы полагаем, что инженер уже нашел длину, температуру и т. д Ему нужно рассмотреть полученный результат с тем, чтобы увязать его с вопросами такого рода: «будет ли данное устройство работать?» или «не будет ли температура слишком высокой?», т. е. будет ли устройство работать, если его длина составит 30 *см*, не будет ли температура 200° С слишком высокой и т. д.?

На данном этапе инженер принимает решения. Принятию решений посвящена часть III этой книги, однако здесь следует указать, что в процессе принятия решений не

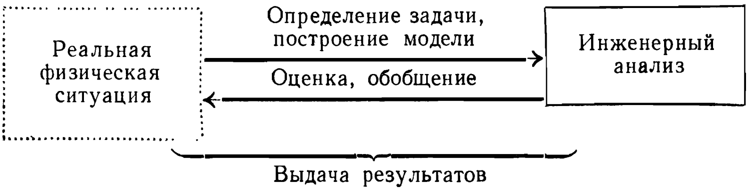


Рис. 9.1. Схема процесса инженерного анализа.

все действующие факторы являются объективными. Многие решения, во всяком случае частично, принимаются на основе субъективных суждений. (К *объективным* здесь мы относим все факторы, внешние по отношению к лицу, принимающему решение; к *субъективным* — факторы личного порядка.) На субъективные решения могут влиять вкус или склонности человека. Например, одни люди (или фирмы) могут быть более склонны к риску, чем другие. Иногда самым большим, что можно получить в ответ на неопределенные, но чрезвычайно важные вопросы типа: «будет ли устройство работать?», является информация вероятностного характера; поэтому при принятии решений важную роль играет теория вероятностей и математическая статистика.

9.2. Обобщение

Обобщение — это изучение. На данном этапе процесса инженерного анализа уже получено решение конкретной задачи. Чтобы извлечь максимальную пользу из того, что уже сделано, целесообразно рассмотреть применимость полученного конкретного решения в общем случае. Идея состоит в том, чтобы увидеть, что можно применить в других аналогичных задачах в иной ситуации. Запомните, что всегда нужно потратить несколько минут, чтобы кое-что *почерпнуть из результатов вашей работы.*

9.3. Выдача полученных результатов и семантика

Остальная (и основная) часть этой главы посвящена вопросу выдачи полученных результатов. Эти результаты почти всегда выражаются символически. Обычными символами являются слова (как в письменной, так и в устной форме) и изображения (графики, рисунки, эскизы и т д.). В некоторых случаях для передачи информации сознательно или непроизвольно также используются жестикуляция, выражение лица, тон голоса, манера говорить и т. п.

При обсуждении и изучении процесса передачи информации обычно внимание сосредоточивается на свойствах отдельных сообщений. Особенно это относится к области знания, называемой теорией информации. В этой книге, однако, передача сообщений рассматривается как *операция*, выполняемая *людьми*. Важными элементами при передаче сообщений являются *отправитель*, *получатель* и само *сообщение*. В общем случае как отправителем, так и получателем могут быть как человек, так и машина. В данной книге рассматривается передача сообщений, когда и отправителем и получателем является человек и когда сообщение является словесным или графическим. При передаче сообщений такого рода исключительно важно, чтобы и отправитель и получатель понимали, что в передаче и приеме таких сообщений участвуют люди — два человека со всеми присущими им несовершенствами. Чрезмерная концентрация внимания на самом сообщении без надлежащего рассмотрения причин, вызывающих необходимость его передачи, и влияния, которое это сообщение окажет на получателя, может привести к тому, что при высоком качестве самого сообщения его эффективность будет снижена плохой передачей.

Для эффективной передачи сообщений важно знакомство с основными понятиями той области знания, которая называется общей семантикой. Не следует думать, что семантика связана лишь с «вопросом определения терминов». Семантика изучает связи между словами, мыслями и поведением, т. е. она изучает, каким образом слова воздействуют на мысли и поступки людей и наоборот. Это наука об общении людей в самом широком смысле слова. Этот круг вопросов далеко выходит за рамки одного лишь определения терминов, хотя, как и можно ожидать, в некоторой степени семантика занимается также и определением терминов. В остальной части этого раздела будут кратко изложены некоторые элементарные идеи семантики.

Основное положение семантики гласит, что слова являются символами. Слово — не вещественно. Специалисты в области семантики любят использовать аналогию с картой и местностью, указывая, что карта и местность — это не одно и то же. Аналогично *слово* «стул» — это не то же самое, что и обозначаемый им *материальный предмет*. В семантике определяемая вещь называется *референтом*. Таким образом, карта — это не местность и слово — не референт. Совершенно очевидно, что могут быть вычерчены карты, неудовлетворительно описывающие местность, которую они, как предполагается, отображают. Можно вычертить карту, которая вообще не отвечает какой-либо местности. А как насчет слов?

За словами не обязательно должно стоять что-нибудь. Кроме того, для различных людей одни и те же слова означают различные вещи. Символ и символизируемая им вещь— *не одно и то же*. Это только символ.

Другое важное положение семантики имеет отношение к определениям. Классический способ определения значения слова состоит в следующем: 1) отнести его к общему классу аналогичных вещей и 2) приписать ему характеристики, отличающие его от других членов этого класса. Так, собака — это 1) животное, 2) с шерстью, четырьмя ногами и т. д. Такого рода определение будет правильным, если оно соответствует действительности. Затруднение состоит в том, что таким образом можно определить предмет, который совершенно не имеет референта! Так, попураф — животное с семью ногами, красно-сине-белополосатой шкурой и т. д. Тот факт, что попурафа не существует в природе, при таком определении не имеет значения.

Специалисты в области семантики используют несколько иное понятие определения. Они считают, что определение (один из видов сообщения) служит для ознакомления какого-либо лица (получателя) со значением рассматриваемого символа. Так, они утверждают, что определение — это своего рода сообщение и что, пользуясь тем или иным сообщением или определением, необходимо учитывать способность получателя понять слова, содержащиеся в этом сообщении. Это непосредственно подводит нас к выводу о том, что определения должны строиться на основе таких понятий, с которыми получатель непосредственно знаком. Фактически такого рода утверждение можно сделать по поводу передачи любых сообщений. Употребляемые слова, ссылки и то, что молчаливо подразумевается в этих сообщениях известным, должны быть в пределах знаний получателя либо объясняться посредством знакомых ему понятий.

Следует поэтому заметить, что люди, не обладающие одинаковым опытом, часто вообще не могут понять друг друга. Звуки, произносимые одним, не будут иметь для другого никакого смысла, даже если они будут разговаривать на одном и том же языке. В следующий раз имейте это в виду, когда услышите спор, например, между руководителем профсоюза и представителем фирмы, верующим и атеистом, ученым-естественником и ученым-гуманитарием.

Хорошим методом иллюстрации положений семантики является применение так называемых ступеней абстракции. В качестве примера рассмотрим ступени абстракции в области термодинамики, изображенные на рис. 9.2. На самом нижнем уровне находится опыт, приобретаемый в результате простейших наблюдений материального мира. На этом уровне дать словесное определение возможно не иначе, как посредством описания отдельных конкретных операций. Рассмотрим, например, определение длины. Никакой величиной или искусным набором слов нельзя описать длину как свойство. Определить ее можно, лишь описав способ ее измерения. Измерение длины — это некоторое действие, или, как обычно говорят, *операция*. Определения такого рода, т. е. определения через операции, называются операционными определениями. Операционные определения связывают мир слов и символов с материальным миром.

Люди выводят понятия длины в процессе ее измерения, наблюдения за ее свойствами и т. д., а слово (символ) замещает это понятие. Построение понятия и описывающего его символа является операционным определением, без которого вся идея не имеет смысла. Операционные, т. е. сформулированные словесно, понятия массы, силы и времени строятся аналогично.

Однако эта картина усложняется тем, что разум человека позволяет достигать абстракций и обобщений более высокого уровня. Так, существуют слова *о словах* и понятия,

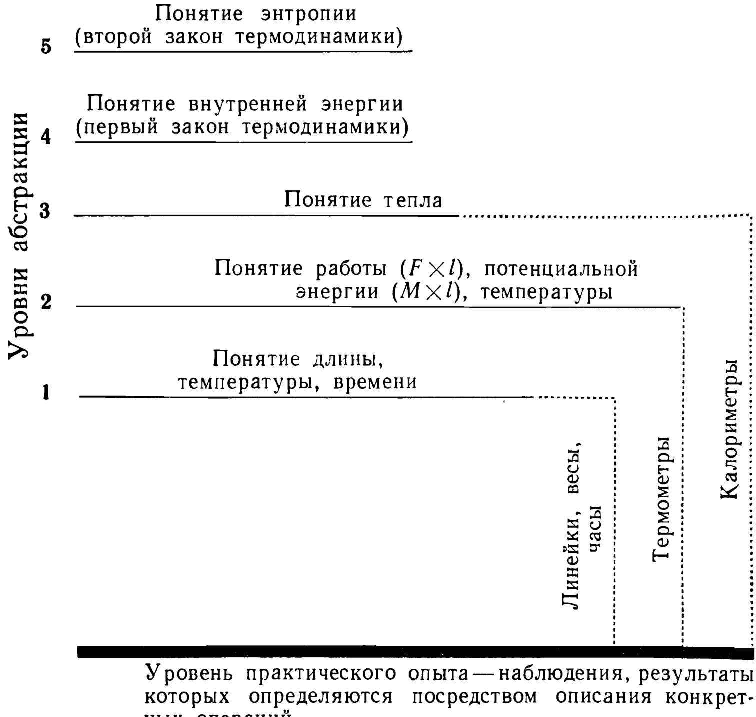


Рис. 9.2. Ступени абстракции в термодинамике

которые хотя бы на одну ступень абстракции отдалены от какого-либо операционного определения, предполагающего лишь знание, приобретенное опытом. Хорошим примером служит потенциальная энергия (см. ступени абстракции в термодинамике). Это выполняемая с помощью карандаша и бумаги операция умножения веса на высоту (длину) относительно плоскости отсчета. Определение потенциальной энергии является операционным, и, кроме того, оно связано с опытным знанием через операционные определения длины и веса. Допустим, однако, что я определяю алаверт как произведение сервалозиса на бокток. Хотя алаверт определен операционно (операцией с помощью карандаша и бумаги), но поскольку такие понятия, как сервалозис и бокток, не имеют операционных определений и опытное знание показывает, что всей этой цепи понятий нет соответствия в реальной действительности, то она не имеет смысла.

Обратите внимание на то, что число ступеней абстракции в термодинамике так велико, что энтропию от опытных данных отделяет много шагов. (По этой причине энтропия, когда с ней встречаются впервые, кажется таким таинственным понятием.) Чтобы термины, стоящие на любом уровне абстракции, имели смысл, они должны получить операционное определение с помощью слов, стоящих на нижней, а *не* на верхней ступени абстракции (т. е. с помощью менее абстрактных слов или слов, по своему содержанию ближе стоящих к опытным данным), и там, где описывается реальная действительность, ступени абстракции должны быть полностью связаны с опытными данными.

Философская мысль обычно опирается на основы аристотелевой логики. Многие специалисты в области семантики указывали, что не все положения аристотелевой логики правильны. В логике укоренилось положение, что ни одно утверждение не может быть истинным и ложным в одно и то же время. Вещь не может иметь свойство «А» и в то же время свойство «не А». Однако так прочно, к сожалению, не укоренилось другое положение: логика такого типа справедлива *лишь в отношении утверждений или вещей определенных видов*. В частности, она справедлива лишь в том случае, когда имеются согласованные операционные определения того, что считать «истинным» и «ложным» и что считать «А» и «не А». Неправильное применение аристотелева закона исключенного среднего (вещь не может быть одновременно «А» и «не А») приводит к серьезным затруднениям, например к стремлению думать по принципу «или — или», когда этот принцип не подходит. Рассмотрим, например, утверждение:

«вы или за меня, или против меня». Специалистам в области семантики известно, что лицо, к которому обращено это утверждение, может иметь третью точку зрения: может быть иногда «за», а иногда «против» или по некоторым пунктам «за», а по другим «против», может быть безразличным либо нерешительным или же по некоторым пунктам быть на полпути между «за» и «против».

В качестве заключительного пункта этого краткого введения в семантику следует указать, что люди склонны наделять вещи антропоморфическими чертами (антропоморфический — «имеющий образ человека»). Например, об экономике говорят так, как если бы она была живым, дышащим человеком, способным заболевать, поправляться или еле-еле ковылять. Некоторые авторы в своих статьях и выступлениях наделяют аналогичными чертами профессию инженера. Однако такая аналогия имеет свои ограничения, и даже после столь беглого знакомства с семантикой, как здесь, студенты смогут находить референты и операционные определения для слов, употребляемых в антропоморфическом смысле, прежде чем тратить уйму времени на бесплодные дискуссии.

9.4. Правила эффективной передачи сообщений

Теперь после общего введения в семантику, изложенного в предыдущем разделе, можно установить некоторые более определенные правила эффективной передачи сообщений или факторы, влияющие на такую передачу. Эти правила не сложны и довольно очевидны для каждого, кто занимается этим вопросом. Однако часто ими пренебрегают.

1. Точно определяйте цель сообщения. Какова цель этого сообщения: передать определенную информацию? убедить кого-либо в чем-либо? одобрить что-либо? побудить к размышлению? и т. д. Нужно ли оно вообще?

2. Стройте свое сообщение таким образом, чтобы оно *соответствовало характеру аудитории* (*получателя*). Проявляет ли аудитория интерес? Готова ли аудитория слушать вас? В состоянии ли она это делать? Правильно ли выбран объем сообщения? Знакомы ли аудитории употребляемые вами слова и другие символы? Построено ли изложение сообщения так, что вы исходите из того, что аудитории уже

известно, и идете к тому, что она еще не знает? Ясно ли вам, что предположительно должна сделать аудитория, получив это сообщение?

3. Способ передачи сообщения должен быть как можно более эффективным. Коротки ли ваши предложения, четко ли они сформулированы? Ясны ли графики и рисунки и легко ли их прочитать и понять? Имеют ли смысл слова и другие символы в том плане, как было указано в разд. 9.3? Выбран ли наилучший способ передачи сообщения — письменный, устный, графический? Четко ли выделены факты, мнения, рекомендации и т. д.? Дается ли вступительный обзор, охватывающий основные вопросы, с тем чтобы занятая аудитория (или читатель) могла схватить существо вопроса, не входя во все детали? Можно задать тысячу вопросов в том же духе, но общая идея уже ясна и сейчас. Все, что вам нужно,— это тренировка. Все это подсказывает нам еще одно «правило».

4. Оцените сделанные вами в прошлом сообщения и посмотрите, когда и почему они были успешными или неудачными. Такого рода самооценка обеспечивает непрерывную проверку эффективности сделанных вами сообщений и со временем позволит вам делать их очень эффективно. И последнее правило:

5. Учитесь быть хорошим слушателем. Поскольку не все принимаемые вами сообщения будут исходить от людей, владеющих искусством их эффективной подачи, часто необходимо проявлять изобретательность, чтобы раскрыть цель сообщения, основные его положения, конкретный смысл, ожидаемые следствия и т. д. Умение слушать означает, что отдельные сообщения нужно воспринимать не одновременно, а поочередно и что вначале необходимо выслушать и понять сообщение, а затем уж думать об ответе.

Студенты инженерных специальностей передают очень много сообщений своим преподавателям во время контрольных работ, при выполнении домашних заданий, при ответах. Многое можно выиграть, рассматривая эти задания и контрольные работы как сообщения, передаваемые в системе связи. Возьмем, например, цель сообщения. (Студентам необходимо самим решать этот вопрос. Различные преподаватели будут ставить различные цели.) Если студенты будут рассматривать свои ответы как процесс *передачи сообщений* (и до того, как им будут выставлены оценки, и после этого), то они смогут узнать много полезного относительно того, как существенно повысить свои знания — и, между прочим, оценки.

9.5. Замечания по поводу письменных сообщений

Распространено мнение, что все студенты колледжей, и особенно студенты технических факультетов, не владеют пером. Для существования этого мнения имеются основания. «Почему Джонни не умеет писать?» — под такими и подобными заголовками появляются статьи в отраслевых научно-технических журналах, специализирующихся на вопросах образования. За последние годы ряд статей по этому вопросу был опубликован в журнале *Saturday Review*. Некоторые идеи, рассматриваемые в данном разделе, были изложены в номере этого журнала от 20 февраля 1965 г., в статье Клаппа, озаглавленной «Какого дьявола вы не учите первокурсников владеть пером?».

Рассматривая письменное сообщение — информационного, а не художественного характера, необходимо выделить два аспекта. Один из них—*грамотность*, а другой — *компетентность* его составителя. Грамотность — это безошибочное использование грамматики и правил правописания. Это также владение достаточным словарным запасом. Ошибки такого характера легко обнаружить, и обычно именно они являются источником жалоб о плохом изложении. Правописание и грамматику освоить нетрудно, поэтому плохое знание этих предметов часто рассматривается как признак плохого образования.

Компетентность — это мастерство более высокого класса, чем грамотность, и поэтому судить о ней труднее. Под компетентностью подразумевается умение выражать мысли, логические последовательности мыслей, идеи, доказательства и т. д. в ясной, четкой, понятной и удобочитаемой форме. Компетентность связана с содержанием излагаемого вопроса, в то время как грамотность не зависит от рассматриваемого вопроса. Компетентность — это умение выражать свои мысли языком, понятным для других. Заметим, что компетентный специалист может плохо знать правописание (не делая, однако, *слишком* серьезных грамматических ошибок) и что абсолютно грамотный человек, знающий все правила грамматики и синтаксиса, а также стилистики, может быть совершенно некомпетентным. Разумеется, компетентность ни в коей мере не может оправдать неграмотность, но важно видеть и то, что грамотность еще *не обязательно* должна свидетельствовать о компетентности и наоборот.

Каким образом студенты технических специальностей могут добиться того, чтобы их сообщения технического характера были и грамотными и свидетельствовали о их компетентности? Чтобы добиться последнего, существенным является понимание принципов семантики. Кроме того, в определенных случаях помогает применение некоторых основных правил, изложенных в предыдущем разделе. Надежным способом является проверка как грамотности, так и содержательности каждого письменного сообщения вашим товарищем или коллегой по работе. Часто хороший секретарь может проверить работу с точки зрения грамотности, однако не следует ожидать, что он окажет вам большую помощь с точки зрения содержательности.

В конце концов инженеры и студенты инженерных специальностей окажутся в выигрыше, если поймут взаимосвязь между чтением, размышлением и письменным изложением. То, что студенты инженерных специальностей читают мало литературы, в конечном счете, безусловно, приводит их к неумению составлять письменные сообщения.

Чтение романов, а также хороших статей общего характера является верным средством как против неграмотности, так и против неумения составлять письменные сообщения. Связь между письменным изложением и размышлением очевидна. Некоторые даже утверждают, что это одно и то же. Конечно, если сообщение плохо (некомпетентно) написано, то обычно считают, что и мыслит этот человек плохо, однако, по-видимому, все же более правильно считать, что некоторые люди хотя и понимают свой предмет, но не умеют составить письменного сообщения просто потому, что они не умеют выражать своих мыслей.

И последняя мысль. Нельзя научиться писать вообще! Прежде чем вы начнете писать, вы должны знать, что вы хотите сказать и кому вы это хотите сказать.

9.6. Замечания по поводу устных сообщений

Большинство положений семантики, правил правильной передачи сообщений и замечаний по поводу письменных сообщений относится также и к устным сообщениям. Однако устные сообщения имеют и некоторые свои особые свойства. Например, аудитория может вам возражать или задавать вопросы. Аудитория может располагать ограниченным временем, и поэтому решающую роль будет играть продолжительность вашего выступления.

Заметим, что получатель письменного сообщения может отложить (и действительно откладывает) его в сторону, когда оно ему наскучит или когда у него не хватит терпения разобраться. Аудитория может вас освистать, выкрикивать неодобрительные восклицания, слушатели могут покинуть зал, но из вежливости это делается редко. Однако руководитель может не выдержать и сказать: «Выкладывайте суть». Наконец, передача устных сообщений имеет ту особенность, что здесь люди вступают в контакт друг с другом. Манера говорить, выражение лица, жесты и т. п. составляют часть сообщения. Пишущий может для этой цели использовать языковые средства (стиль может быть цветистым, резким, лаконичным, мягким и т. д.), однако по своему характеру письменное сообщение является менее личным, чем устное.

В большинстве учебных заведений читаются лекции по ораторскому искусству, и не случайно они пользуются успехом у студентов.

Как и в письменных сообщениях, в данном случае также можно проводить различие между грамотностью и компетентностью. Еще одной важной особенностью выступления с устным сообщением является манера изложения материала (что аналогично почерку в письменных сообщениях). Тренировка, получаемая в процессе изучения ораторского искусства, когда уделяется внимание всем трем сторонам: грамотности, компетентности и манере изложения, имеет неоценимое значение.

Положения семантики, общие правила передачи хороших сообщений и правила грамотности применимы как к устным, так и к письменным докладам. Тем не менее письменное и устное сообщение должны отличаться друг от друга по стилю. При выступлении с устным сообщением, кроме того, важную роль играют и такие дополнительные особенности, как выразительность речи и облика говорящего. Поэтому зачитывание вслух доклада, предназначенного для чтения, почти всегда является плохим способом передачи сообщений. *Никогда не зачитывайте перед аудиторией сообщения, подготовленного как письменный доклад*! Для эффективной передачи сообщений необходимо, чтобы устные и письменные сообщения готовились и подавались по-разному, каждое в манере, соответствующей его специфическим особенностям. Повторяем: *никогда* не зачитывайте перед аудиторией письменного доклада! Если у вас нет опыта устных выступлений, то при необходимости подготовьте и зачитайте *устный* доклад. Но только не читайте вслух письменный вариант.

9.7. Замечания по поводу графических сообщений

Неграмотное выполнение графических работ — очень серьезный недостаток (более серьезный, чем неграмотность в письменных работах), где наиболее неприятной является некомпетентность исполнителя. Причиной появления неграмотных графических работ является незнание правил их выполнения. Именно по этой причине в прошлом эти правила изучались очень тщательно. Однако за последнее время, по мере того как процесс инженерного проектирования все более и более отдалялся от чертежной доски, все меньше возникала необходимость в изучении этих правил и роль технического черчения заметно снизилась. Инженер должен знать чертежное дело, но ему не обязательно быть чертежником, как не обязательно уметь печатать на пишущей машинке. Умение построить ортогональную проекцию, проставить размеры и т. п. необходимо для грамотного выполнения графических работ, но этому можно быстро выучиться, рисуя эскизы. Умение делать эскизы является для инженера ценным качеством, которое он с успехом использует для передачи сообщения. Точно так же, как некоторые способные инженеры испытывают серьезные неудобства из-за того, что они не умеют составлять письменных сообщений, в таком же положении оказываются и те, кто беспомощны в графике. Правильный четкий чертеж подобен правильному четко написанному сообщению. Чертить можно научиться —

Таблица 9.1

Вид сообщения	Навыки и знания, необходимые для передачи сообщения			
	Специальные знания	Неспециальные навыки	Грамотность	Компетентность
Графическое	Умение чертить	Умение делать эскизы	Знание правил выполнения графических работ	Умение почерпнуть идеи из эскизов, умение выразить идеи посредством эскизов
Словесное (письменное)	Умение печатать на машинке	Хороший почерк	Грамматика, правописание, стиль	Знание положений семантики. Знание предмета. Умение организовать материал
Словесное (устное)		Умение выступать с устными сообщениями (интонация, выразительность)	Умение строить предложения	Выразительность речи

или во всяком случае усовершенствовать свои навыки в этом деле — точно так же, как чтением литературы и практикой можно научиться составлять письменные сообщения.

В табл. 9.1 даны соотношения между некоторыми из рассматриваемых здесь понятий с точки зрения подачи графических и устных сообщений. Показано несколько уровней: специальные знания, грамотность и компетентность. Заметим, что знание начертательной геометрии при выполнении чертежных работ аналогично знанию правил грамматики, правописания, построения предложений и т. д. при построении словесных сообщений. Инженер должен уметь читать чертежи, точно так же, как он должен уметь читать письменные сообщения. Заметим, что требуются знания двух видов: *специальные знания* и *знания, необходимые для передачи сообщений*. Инженеры должны в совершенстве владеть мастерством передачи сообщений — они должны уметь чертить, писать и правильно строить свои устные выступления. Это является основой для эффективной передачи сообщений в повседневной работе. В случае выступлений с устными сообщениями важно также учитывать особые случаи, например рассмотрение некоторого технического документа в аудитории, компетентной в соответствующей области знаний, или обсуждение планов группой инженеров или руководителей. По-видимому, в наши дни инженеру уже не нужно быть квалифицированным чертежником. Это утверждение не будет справедливым во всех случаях, однако ясно, что при передаче сообщений графические навыки работы наименее важны. В табл. 9.1 наиболее важные качества, необходимые инженерам для эффективной передачи сообщений, помещены в графе «Компетентность».

9.8. Краткие выводы

На этом по существу завершается обсуждение отдельных этапов инженерного анализа. Вначале процесс инженерного проектирования мы разбили на три части: изобретательство, инженерный анализ и принятие решений. Затем процесс инженерного анализа был разбит на следующие этапы: определение задачи, построение модели, использование физических принципов, вычисления, проверки, оценка, обобщение и выдача результатов. Теперь настало время перейти к принятию решений. Но вначале как своего рода мост для перехода к этим вопросам в следующей главе дается еще один пример — проектирование воздушно-водяной игрушечной ракеты. В этой главе, написанной в сотрудничестве с представителем фирмы-изготовителя этой игрушки, мы опять проследим все фазы инженерного проектирования: изобретательство, инженерный анализ и принятие решений.

Задачи

9.1. В примерах, рассмотренных в гл. 7, не приводилось письменных сообщений. Подготовьте сообщения о полученных результатах размером в одну страницу каждое.

9.2. Если я говорю: «У меня болит рука»,— то что, по-вашему, я имею в виду и что я ощущаю?

9.3. Опишите кратко суть второго закона Ньютона (или какого-либо другого закона) для: 1) студента исторического факультета вашего университета; 2) вашего преподавателя механики; 3) вашего друга, который во время изучения этого вопроса две недели отсутствовал на лекциях. Проанализируйте, в какой мере и почему эти сообщения будут иметь различный характер.

9.4. Подготовьте два доклада — письменный и устный — для вашей группы о том, как вы провели прошлое лето (или по какому-либо другому интересующему вас предмету).

9.5. Проанализируйте и критически оцените свои возможности с точки зрения навыков и знаний, необходимых для передачи сообщений и перечисляемых в табл. 9.1. Составьте конкретный план устранения этих присущих вам недостатков. Лучше вас никто этого не сделает!

ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ

1. Hayakawa S. I., Language in Thought and Action, 2d ed., Harcourt, Brace and World, New York, 1964.
Введение в семантику.
2. Johnson W., People in Quandaries, Harper and Row, Publishers, New York, 1946.
Очень хорошая книга о применении семантики в повседневной жизни.

3. Rosenstein A. B., Rathbone R. R., Schneerer W. F., Engineering Communications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

Эта книга содержит введение в теорию информации. Авторы не делают упора на проблемы семантики, связанные с передачей информации. Раздел, посвященный графическим работам и эскизам, превосходен. Кроме того, имеются хорошие разделы по вопросам передачи письменных, устных и графических сообщений.

ГЛАВА 10

ПРИМЕР ИНЖЕНЕРНОЙ РАЗРАБОТКИ

10.1. Введение

В этой главе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с разработкой воздушно-водяной двухступенчатой игрушечной ракеты (фирма «Парк пластикс», г. Линден, шт. Нью-Джерси, изделие № 507). Предшественницей этой ракеты была одноступенчатая модель, изготовленная по немецкому патенту и выпущенная в продажу в США в 1954 г. этой же фирмой. Немецкому изобретателю следует воздать должное за творческий характер его основной идеи. Кроме этого, он получил значительную сумму денег, поскольку американская фирма в течение нескольких лет выплачивала ему вознаграждения как владельцу патента. Наконец фирма «Парк пластикс» приобрела этот патент и теперь является его единоличным владельцем.

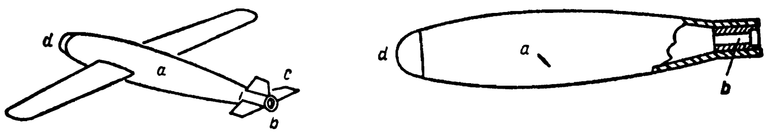


Рис. 10.1. Игрушечная ракета.

Игрушечный летательный аппарат с ракетным двигателем.

Патент США 2732657 (Адам Крауткремер, г. Буденгейм-на-Рейне, ФРГ; заявка от 22 ноября 1952 г. за номером 322077). Это изобретение относится к классу приводных механизмов для игрушек.

Развитие современной техники во многих отношениях получило отражение и в производстве игрушек, в частности живой интерес у детей пробуждают модели самолетов самых различных конструкций. Цель настоящего изобретения — дать новую игрушку такого рода. Эта и другие цели очевидны из следующего описания модели, изображенной на рис. 10.1.

Слева в аксонометрии показана конструкция игрушечного самолета. Справа изображен профиль фюзеляжа этого самолета (частично в разрезе).

При подготовке к запуску полый фюзеляж a частично заполняется, например, водой — с помощью пипетки, шприца, воронки и т. п. или просто заливается водой через входное отверстие. После этого в оставшуюся незаполненной часть подается сжатый воздух, например, с помощью обычного велосипедного насоса, с тем чтобы воздух, а следовательно, и вода находились под давлением в несколько атмосфер. При подаче сжатого воздуха фюзеляж устанавливается на подводящий патрубок так, чтобы конец фюзеляжа с отверстием был направлен вниз. При этом образуется надежная перемычка между входным и выходным отверстиями. Вода собирается в нижней части внутренней полости и находится здесь под давлением нагнетаемого в фюзеляж воздуха. Удерживающее устройство *к* на выходе насоса, прижимая заднюю кромку фюзеляжа к подводящему воздушному патрубку, образует герметичное уплотнение и надежно удерживает самолет в процессе нагнетания воздуха. При освобождении конца фюзеляжа из удерживающего устройства вода под действием сжатого воздуха вырывается из выходного отверстия, и образующаяся при этом реактивная сила сообщает самолету ускорение. В зависимости от энергии, запасенной в сжатом воздухе и веществе, создающем реактивную струю, игрушка может подниматься на ту или иную высоту. После окончания действия реактивной силы самолет, сконструированный, например, как планер, плавно опустится на землю.

Такой игрушечный самолет не запускается, как прежде, с помощью какой-либо катапульты и не забрасывается вверх каким-либо другим известным способом. В качестве движущей силы здесь используется сжатый воздух или другой газ. Воздух воздействует на твердое вещество или жидкость таким образом, что они выбрасываются из герметичного корпуса через имеющееся в нем выходное отверстие. Создаваемая при этом реактивная тяга используется для приведения самолета в движение.

Особое преимущество этой конструкции состоит в том, что здесь исключается всякая опасность пожара, поскольку для приведения самолета в движение не требуется сжигать порох или другие горючие вещества, нужно только накачать в фюзеляж самолета газ, желательно воздух, например, с помощью велосипедного насоса.

Патентуется:

1. Игрушечный летательный аппарат, состоящий из полого герметичного тела, имеющего с одного конца отверстие для выпуска реактивной струи, которое сообщается с внутренней полостью, и пусковое устройство к нему с обратным клапаном на подводящем патрубке для жидкости, размеры которого рассчитаны так, что он свободно вставляется в указанное отверстие для выпуска реактивной струи в корпусе летательного аппарата, обеспечивая необходимое уплотнение в месте сопряжения, а также управляемое вручную удерживающее устройство с фиксирующей защелкой, смонтированное на указанном пусковом устройстве и предназначенное для удержания указанного летательного аппарата за задний конец его фюзеляжа и обеспечения плотного контакта указанного подводящего патрубка для жидкости и газа с кромкой отверстия для выпуска реактивной струи.

2. Устройство, выполненное в соответствии с п. 1 патентной формулы, в котором указанное полое тело является частью игрушечного летательного аппарата.

3. Устройство, выполненное в соответствии с п. 2 патентной формулы, в котором на переднем конце указанного полого тела имеется колпачок из упругого материала, воспринимающий ударную нагрузку.

4. Устройство, выполненное в соответствии с п. 1, в котором обратный клапан на подводящем патрубке для жидкости имеет насадку, размеры которой выбраны с таким расчетом, что она свободно входит в указанное отверстие в корпусе летательного аппарата для выпуска реактивной струи.

5. Устройство, выполненное в соответствии с п. 1 патентной формулы, в котором указанное полое герметизированное тело имеет каплеобразную форму.

Идея создания *двухступенчатой* воздушно-водяной игрушечной ракеты возникла в 1958 г. Эта ракета была задумана, разработана и запатентована фирмой «Парк пластикс». Ее конструкция подробно рассматривается в этой главе книги. Интересно отметить, что одноступенчатая игрушечная ракета поступила в продажу накануне запуска первого советского спутника, а двухступенчатая игрушка уже разрабатывалась, когда поступило сообщение об этом запуске. Интерес общественности к ракетной технике и космосу, усилившийся в связи с запуском первого советского спутника, обеспечил огромную популярность этих игрушечных ракет. Сбыт их возрос примерно с 60 тыс. в 1957 г. почти до 700 тыс. в 1958 г., т. е. более чем в 10 раз. Из этого числа 500 тыс. были двуступенчатым вариантом. В 1964 г. в Соединенных Штатах было продано более 1 млн. воздушно-водяных игрушечных ракет.

Эти данные приводятся здесь лишь для того, чтобы проиллюстрировать популярность этой игрушки, которая объясняется своевременной идеей, квалифицированной инженерной разработкой и ее экономичным исполнением.

10.2. Изобретательская мысль и пластмассовые игрушки

Этот пример иллюстрирует два аспекта изобретательства в более общем плане. Изобретательство связано с рождением идей, позволяющих создавать новые пластмассовые игрушки, и имеет большое значение для фирмы, располагающей для этого необходимым оборудованием и квалифицированным персоналом. В более конкретном плане изобретательство связано только с созданием игрушечных ракет.

Рассмотрим вначале общую проблему. Главный инженер одной из фирм по производству пластмассовых изделий как-то спросил: «Неужели моя главная задача сидеть здесь и что-то изобретать?». Хотя он вправе с нами и не согласиться, но ответом может быть только: «Да!». Это нелегкая работа, поскольку основным критерием для оценки качества идеи является сбыт продукции. Кто знает, будет ли пользоваться спросом новый продукт? С игрушечной ракетой дело обстоит очень хорошо, а вот лунный корабль «лопнул». Основные убытки фирме, выпускающей продукцию широкого потребления, причиняют изделия, не находящие сбыта после того, как они были разработаны, изготовлены и поступили в продажу.

Несмотря на эти затруднения, большинство хороших идей рождается в техническом отделе самой фирмы, однако не только путем их «высиживания». Наиболее важный источник идей связан с использованием аналогий. Из пластмасс, по-видимому, можно изготавливать игрушки, которые до настоящего времени выпускались только из металла и дерева. Идея двухступенчатой ракеты подсказана одноступенчатой ракетой. Очевидно, что важное место должны занимать игрушечные аналоги реальных предметов, поскольку большой популярностью у детей пользуются ракеты, вертолеты, бульдозеры и другие машины (см. задачи 10.1 и 10.2).

Можно также указать и на непрерывный поток идей, которые предлагают фирме «независимые» изобретатели, однако лишь очень малый процент этих идей имеет реальную коммерческую ценность. В получении новых идей фирма должна полагаться главным образом на свои ресурсы (см. задачу 10.5).

Второй аспект изобретательства связан с самими игрушечными ракетами. Допустим, что нам необходимо разработать игрушечную ракету. Какие ракеты можно разработать? Рассматривая состояние вопроса *до* появления идеи воздушно-водяного двигателя (когда сжатый воздух быстро выбрасывает воду через выпускное отверстие в задней части корпуса, создавая тем самым тягу, сообщающую ракете ускорение), можно видеть, что она отличается в высшей степени творческим характером. Она проста, здесь используются самые обычные вещества (воздух и вода), и она прекрасно реализуется. В другой неплохой схеме запуска игрушечных ракет используется порох, выделяющий при сгорании газы, которые смешиваются с водой; реактивную струю создает вода, выбрасывающаяся под давлением из ракеты. Какие еще принципы можно предложить? (См. задачи 10.5 и 10.6.)

10.3. Технические возможности создания воздушно-водяной ракеты

После того как высказана идея создания воздушно-водяной пластмассовой игрушечной ракеты, необходимо определить технические возможности ее создания. По существу это вопрос инженерного анализа. Нужно, исходя из этой

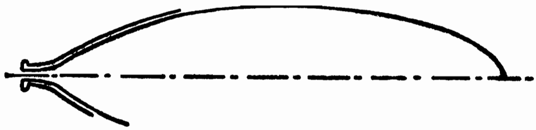


Рис. 10. 2. Эскиз возможной конструкции ракеты.

идеи, поставить конкретные вопросы, на которые можно получить количественные ответы. Каковы эти вопросы?

В данном случае основным критерием является высота, на которую поднимается ракета. На начальной стадии выполняется оценка порядка этой величины, что, безусловно, является самым первым этапом, поскольку при получении результата, равного, например, нескольким сантиметрам, саму идею следовало бы отвергнуть.

Чтобы получить какой-либо прямой ответ, необходимо иметь как можно больше данных о самой ракете. Заметим, что здесь проектирование и инженерный анализ взаимосвязаны. Не прибегая к несколько более детальной разработке ракеты, невозможно провести даже оценку порядка величины. (Проектирование почти всегда на шаг опережает анализ!) Для ориентировочной оценки высоты можно быстро построить от руки примерный чертеж конструкции ракеты, как это показано на рис. 10.2.

Однако этот чертеж вызывает массу вопросов. Если строить ракету примерно такого размера, как на рисунке, то какой толщины должны быть стенки? Какую площадь должно иметь проходное сечение сопла? Сколько воды нужно заливать в ракету? Нас может также интересовать, следует ли продолжать изучение возможностей создания ракеты с помощью карандаша и бумаги или же его нужно прекратить и приступить к экспериментальным исследованиям?

В действительности при разработке этой игрушки исследование возможности ее создания проводилось полностью экспериментальным путем. Была построена модель (что вызвало определенные затраты!) и проведены ее испытания. Однако многое можно определить и путем оценки порядка величины, выполняемой с помощью карандаша и бумаги. Предполагается, что работа над созданием этой ракеты ведется фирмой, изготавливающей пластмассовые игрушки. Здесь уже накоплен определенный опыт, который можно использовать при оценке возможностей этой игрушки. Например, известно, что исключительно трудно изготовить пластмассовую игрушку, стенки которой тоньше 1,1 *мм*. Следовательно, в качестве первого предположения толщину корпуса ракеты можно принять равной 1,1 *мм*. Исходя из этой величины и примерного удельного веса имеющихся пластмасс, можно оценить вес самой ракеты (около 27 *г*). Следует подчеркнуть, что толщину 1,1 *мм* можно было установить только на основе практического опыта в формовании пластмасс или изучения конструкции других изделий из пластмассы. Вычислить эту величину каким-либо известным методом нельзя.

Какое давление может быть использовано? Кажется очевидным, что чем больше давление, тем выше полетит ракета. Разумеется, если давление создается насосом, который качает ребенок (или его отец), то возможная величина давления ограничена силой человека. Кроме того, нужно учитывать безопасность, но частично это связано с проблемой выбора материала.

На этой стадии скорее всего фирма выберет материал (и производственный процесс), который она широко использует. Полистирол — недорогая прочная пластмасса, но она может раскалываться. Ракета из этой пластмассы, по-видимому, не выдержит удара о твердую мостовую. Полибутират хотя и значительно дороже полистирола, однако не хрупок. Это довольно прочный материал, способный выдержать заданные ударные нагрузки.

Если давление внутри ракеты станет слишком большим, то полибутират также начнет деформироваться (вспучиваться), однако корпус ракеты не расколется. Таким образом, при первоначальном выборе материала остановимся на полибутирате.

Теперь вопрос сводится к следующему: какое давление может выдержать ракета из полибутирата при толщине стенок корпуса 1,1 *мм*. Ответ можно получить одним из пяти способов: 1) на основании опыта, которым располагают сотрудники фирмы; 2) по данным изготовителя полибутирата; 3) на основании опыта профессиональных консультантов (которым нужно хорошо платить за их услуги); 4) путем изучения соответствующей литературы и выполнения анализа; 5) путем экспериментирования на модели. В данном случае телефонный звонок в технический отдел фирмы-изготовителя пластмасс позволяет установить, что для небольших изделий при отсутствии у них участков со значительной концентрацией напряжений безусловно допустимо давление 2,8—3,5 *кГ/см*², хотя эта величина и зависит от формы изделия. Практически все возможные способы нагнетания воздуха фактически не позволяют получить давление, превышающее указанное.

Наконец, сколько воды следует заливать в ракету? Если воду не использовать вообще, то будет достигаться очень малая высота, поскольку из сопла выбрасывается очень малая масса газа (и, следовательно, количество движения будет мало). Если залить очень много воды, то слишком много энергии пойдет на подъем воды вместе с ракетой. Кроме того, в этом случае давление воздуха достигнет атмосферного еще до того, как вся вода будет выброшена. Существует некоторое *оптимальное* количество воды, обеспечивающее подъем ракеты на максимальную высоту. Нахождение оптимума на данном этапе — слишком долгая задача. В данный момент задача состоит просто в определении, реальна ли сама идея подъема ракеты на представляющие интерес высоты. Для *этой* цели не обязательно находить оптимум, нужно найти лишь некоторое приемлемое значение в удовлетворяющем нас интервале высот.

Допустим, что избыточное давление равно 2,8 *кГ/см*², а атмосферное давление 1 *кГ/см*². Следовательно, перепад давления Δp обеспечивает выбрасывание струи воды, и, по-видимому, на протяжении всего периода, пока вода выбрасывается, должна поддерживаться значительная величина Δp. Для получения оценки допустим, что избыточное давление воздуха в момент, когда в ракете не остается воды, составляет 0,75 *кГ/см²*. Таким образом, предполагается, что избыточное давление воздуха изменяется от 2,8 до 0,75 *кГ/см²*, а объем — от некоторого неизвестного начального значения до конечного значения, равного общему объему внутренней полости ракеты. Если расширение воздуха происходит с такой скоростью, что этот процесс можно считать обратимым и адиабатным, то можно оценить начальный объем воздуха (а следовательно, и начальный объем воды). Находим начальный объем воздуха

$$P_1\mathcal{V}_1^k = P_2\mathcal{V}_2^k,$$

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/k} = \mathcal{V}_2\left(\frac{1,75}{3,8}\right)^{1/1,4} \approx \mathcal{V}_2 \cdot 0,6.$$

Таким образом, по-видимому, вполне разумно предположить, что первоначально вода заполняет 40% всего объема ракеты и что после расширения воздух занимает 1,6 своего первоначального объема.

Эти предварительные оценки являются весьма приближенными, однако тем не менее они имеют определенную ценность, поскольку позволяют лучше понять задачу и получить лучшее качественное представление о ней.

Если в виде приближения использовать уравнение Бернулли, то скорость истечения реактивной струи можно связать с разностью давлений. (Более подробно использование этого уравнения при решении такой задачи рассматривается ниже.) Перепад давления Δp изменяется от 2,8 до 0,7 *кГ/см²*. Среднее значение составляет $\Delta p = 1,75$ *кГ/см²*. При этом значении Δp оценка скорости истечения реактивной струи равна

$$V_j = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,75 \cdot 980}{10^{-3}}} = 1860\ \textit{см/сек} = 18,6\ \textit{м/сек}.$$

Проверяем размерность

$$\frac{\textit{см}}{\textit{сек}} \longrightarrow \left[\frac{\textit{кГ}}{\textit{см}^2} \cdot \frac{\textit{см}^3}{\textit{кГ}} \cdot \frac{\textit{см}}{\textit{сек}^2}\right]^{1/2} \longrightarrow \frac{\textit{см}}{\textit{сек}}.$$

Приблизительный объем цилиндрической ракеты, изображенной на рис. 10.3, равен 228 *см³*. Если 40% этого объема занимает вода (91 *см*³), то время, необходимое для выбрасывания воды, можно оценить как функцию площади сечения сопла

$$t = \frac{91}{1860 A_j}.$$

Например, при диаметре сопла 3 *мм* получаем около 0,7 *сек*, при 1,5 *мм* получаем 2,8 *сек*. В любом случае выбрасывание воды происходит *очень быстро*.

Эти данные подсказывают два возможных способа оценки ожидаемой высоты полета ракеты. Один из методов основан на законе сохранения количества движения. Допустим, что истечение воды происходит очень быстро, и поэтому количество движения струи, истекающей из задней части ракеты, можно принять равным количеству движения ракеты без воды. Здесь не принимаются во внимание потери на рассеяние и, что, по-видимому, более важно, не учитывается тот факт, что количество движения струи, выброшенной вначале, используется частично на подъем воды, остающейся в ракете, и сообщение ей ускорения. Чтобы в какой-то мере учесть это обстоятельство, можно рассматривать измененную массу ракеты, равную массе самой ракеты плюс, например, половина первоначальной массы воды.

Общее количество движения струи, истекающей из сопла, равно

$$m_w V_j = \frac{0,001 \cdot 91 \cdot 1860}{980} = 0,17 \ \text{кГ} \cdot \text{сек}.$$

Если эта величина равна начальному количеству движения ракеты, то начальная скорость ракеты будет равна

$$V_{R0} = \frac{0,17}{m_R} = \frac{0,17 \cdot 980}{27,3 \cdot 10^{-3} + 0,001 \cdot (91/2)} = 2300 \ \text{см/сек} = 23 \ \text{м/сек}.$$

Пренебрегая аэродинамическим сопротивлением, получим, что ракета, имеющая у поверхности земли начальную скорость 23 *м/сек*, поднимается на высоту 27 *м*. Это действительно неплохая высота.

Используя закон сохранения энергии, можно сделать другую приближенную оценку. Единственным видом энергии является энергия расширяющегося воздуха в ракете. Если допустить, что расширение — обратимый адиабатный процесс, то при известном объеме можно вычислить изменение массы и температуры воздуха (а следовательно, и изменение энергии). Если при указанных выше численных значениях начальная температура воздуха равна 26° С, то конечное значение температуры находится из соотношения

$$T_1 \mathcal{V}^{k-1} = T_2 \mathcal{V}_2^{k-1},$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2}\right)^{k-1} = 299 \cdot (0{,}6)^{0,4} = 241^\circ\,\text{K} = -32^\circ\,\text{C}.$$

Масса воздуха равна

$$m_a = \frac{P_1 \mathcal{V}_1}{RT_1} = \frac{3{,}80 \cdot 137}{2930 \cdot 299} = 0{,}0006\ \textit{кг},$$

$$\textit{кг} \longrightarrow \frac{(\textit{кГ}/\textit{см}^2) \cdot \textit{см}^3}{(\textit{кГ} \cdot \textit{см}/\textit{кг} \cdot \textit{град}) \cdot \textit{град}}.$$

Изменение внутренней энергии воздуха равно

$$\Delta U_a = m_a C_v T = 0{,}0006 \cdot 172 \cdot 58 = 6\ \textit{кал},$$

$$\textit{кал} \longrightarrow \textit{кг} \cdot (\textit{кал}/\textit{кг} \cdot \textit{град}) \cdot \textit{град}.$$

Полагая это значение равным потенциальной энергии ракеты при подъеме ее на максимальную высоту (при этом не учитывается подъем некоторого количества воды, прежде чем вся она будет выброшена), находим высоту:

$$E_{\text{ракета}} = E_{\text{воздух}},$$

$$m_R g h = 6\ \textit{кал},$$

$$h = \frac{6 \cdot 427 \cdot 10^{-3}}{72{,}8 \cdot 10^{-3}} \approx 35\ \textit{м}.$$

Этот результат в 1,5 раза отличается от оценки, сделанной на основании закона сохранения количества движения. Однако полученная величина *того же порядка*, и на данном этапе анализа это весьма важно. Можно сделать вывод, что идея создания воздушно-водяной ракеты во всяком случае заслуживает дополнительного изучения и развития.

10.4. Экономическая целесообразность

Хотя, по-видимому, предлагаемая ракета будет летать удовлетворительно, дальнейшую работу над ней нельзя считать оправданной, если проект не окажется экономически целесообразным. Короче говоря, вопрос в том, можно ли будет добиться, чтобы продажная цена ракеты, определяемая ее себестоимостью, обеспечивала бы хороший сбыт и приемлемую прибыль? В решении этого вопроса должны, конечно, участвовать и инженеры, но значительную роль здесь играют другие лица (специалист, изучающий рыночную конъюнктуру, бухгалтеры и экономисты фирмы, представители отдела сбыта). Нередко для определения затрат, приемлемой цены реализации и ориентировочного объема сбыта необходимо выполнить специальные исследования или провести эксперимент. В данном случае переход к этому этапу фактически произошел при наличии очень небольшого объема конкретной и детальной информации. Опыт, накопленный при производстве других пластмассовых изделий, показал, что можно изготовить довольно дешевую ракету, и поэтому на нее может быть установлена умеренная рыночная цена. Каждый, кто имел отношение к этой игрушке, чувствовал, что она будет популярной.

Нельзя недооценивать и важности экономических факторов. Прибыли фирмы-изготовителя обычно составляют от 3 до 7% и зависят главным образом от того, насколько правильно произведен выбор новой продукции. Это означает, что убытки, возникающие за счет нереализованных изделий, являются основным фактором, снижающим прибыль. Поэтому исключительно важно выбирать для разработки нужные изделия — на основании исследования технических возможностей и экономических факторов.

На данном этапе, по-видимому, следует показать, как в розничной цене игрушки находят отражение производственные затраты. Обычно игрушку ценой 1 долл. фирма-изготовитель поставляет за 40 центов. Из этой суммы 25 центов составляют фактическую стоимость производства: затраты на материалы, рабочую силу, оборудование и т. д. Остальные 15 центов — общие накладные расходы. Сюда входят такие статьи расхода, как заработная плата руководящих работников фирмы, стоимость разработки, административно-хозяйственные расходы и прибыль. Небольшой размер прибыли объясняет, почему при принятии любых решений о разработке и производстве изделий стоимость является решающим фактором.

10.5. Инженерный анализ одноступенчатой воздушно-водяной игрушечной ракеты

Допустим, что принятие решений о разработке ракеты позволило получить следующие технические условия (см. также задачи 10.7 и 10.8):

Общая длина 140 *мм*
Максимальный диаметр 38 *мм*
Толщина стенок 1,1 *мм*
Общий объем 75 *см*^{3}
Диаметр сопла 1,5 *мм*
Вес 16,7 *г*

Максимальное избыточное давление воздуха не должно превышать 3,5 *кГ/см*^{2}. Теперь можно сформулировать следующие вопросы, на которые должен дать ответ инженерный анализ:

1. На какую высоту поднимается ракета при заданных начальных давлении и объеме воды?
2. Каково оптимальное количество воды, необходимое для достижения максимальной высоты?
3. Какова оптимальная площадь поперечного сечения сопла?
4. Как влияет коэффициент аэродинамического сопротивления на высоту полета?
5. Как влияет конструкция сопла на высоту полета?

Тем читателям, которые пожелают самостоятельно решить эту сложную задачу инженерного анализа, необходимо на этом месте остановиться и ответить на приведенные выше вопросы. Фактические данные для проверки ответов даются далее в этой главе. Для тех, кто продолжает чтение, будет изложен возможный вариант инженерного анализа, позволяющий решить поставленные выше вопросы.

В задачах об ускорении ракеты основным является уравнение количества движения. Если ракете, движущейся с ускорением, поставлен в соответствие определенный фиксированный объем, то в обозначениях, принятых на рис. 10.3, основное уравнение можно записать следующим образом:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho V_a \, d\mathcal{V} + \oint_A V_a (\rho V_r n dA).$$

Важно напомнить, что V_a обозначает «абсолютную» скорость (скорость относительно инерциальной, или ньютоновской, системы координат, в данном случае относительно Земли),

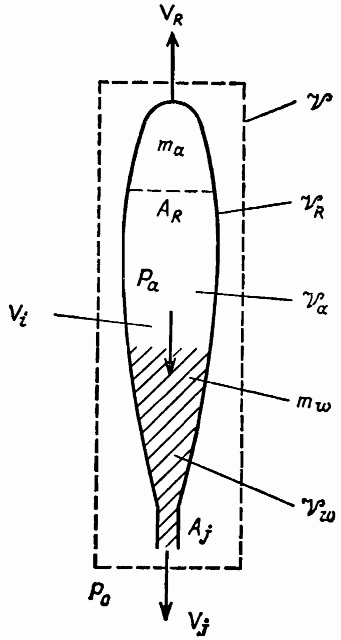


Рис. 10.3. Принятые обозначения.

V_R— абсолютная скорость ракеты, V_i и V_j— относительные скорости, $\mathcal{V}_R$— общий объем ракеты, $\mathcal{V}_a$ — объем воздуха, $\mathcal{V}_w$— объем воды, $\mathcal{V}$—ускоряемый фиксированный объем.

а V_r — скорость относительно подвижной системы координат. Внешними силами, действующими на ракету, являются вес и аэродинамическое сопротивление:

$$F = -mg - C_D \frac{\rho_a V_R^2}{2} A_R.$$

За положительное направление координаты принимается направление вверх. Силами давления пренебрегаем. Член $\int_{\mathcal{V}} \rho V_a \, d\mathcal{V}$ — количество движения внутри фиксированного объема, поэтому в данном случае

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\rho V_a\,d\mathcal{V}\approx\frac{d}{dt}(mV_R)=m\frac{dV_R}{dt}+V_R\frac{dm}{dt},$$

где m — общая масса:

$$m=m_R+m_w+m_a\approx m_R+m_w.$$

Представление количества движения внутри фиксированного объема в виде mV_R является чрезмерным упрощением. Это справедливо только в том случае, если все вещество, находящееся внутри этого объема, движется с абсолютной скоростью V_R, однако в нашем примере вода имеет другую скорость. Допустим, что если этим эффектом пренебречь, то будет достигнута точность, достаточная для целей вычисления.

Член $\oint V_a\,(\rho V_r n\,dA)$ выражает поток количества движения через поверхность, ограничивающую фиксированный объем; $\oint_A \rho V_r n\,dA$—поток массы, равный $-dm_w/dt=-dm/dt$. Для данной задачи закон сохранения массы выражается в следующем виде:

$$\oint_A \rho V_r n\,dA=-\frac{dm_w}{dt}=-\frac{dm}{dt}=\rho_w A_j V_j;$$

V_a— абсолютная скорость воды, покидающей фиксированный объем. В данном случае эта скорость постоянна и равна V_R-V_j, если правильно учтен знак. Следовательно, рассматривая это уравнение совместно с уравнением неразрывности, получаем

$$-mg-C_D\frac{\rho_w V_R^2}{2}A_R=m\frac{dV_R}{dt}+V_R\frac{dm}{dt}-$$

$$-V_R\frac{dm}{dt}-V_j\frac{dm_w}{dt}=m\frac{dV_R}{dt}-V_j\frac{dm_w}{dt}.$$

Это известное выражение, описывающее полет ракеты, в котором последний член называется *тягой*. При учете принципа неразрывности $dm_w/dt=-\rho_w A_j V_j$, получаем

$$-mg-C_D\frac{\rho_a V_R^2}{2}A_r+\rho_w A_j V_j^2=m\frac{dV_R}{dt}.$$

Последнее выражение представляет собой дифференциальное уравнение для скорости ракеты V_R как функции времени. Заметим, что m также является функцией времени и что скорость истечения реактивной струи из сопла еще неизвестна. Поток массы и скорость V_j связаны между собой соотношением

$$-\frac{dm}{dt}=\rho_w A_j V_j.$$

Скорость V_j можно оценить, полагая, что в данном случае применимо уравнение Бернулли, и пренебрегая V_i^2 по сравнению с V_j^2. Результат имеет вид

$$V_j^2=\frac{2(P_a-P_0)}{\rho_w}.$$

Однако уравнение Бернулли не подходит здесь по нескольким соображениям. Во-первых, оно выведено для стационарного состояния, а в данном случае очевидно, что рассматриваемый процесс является нестационарным. Во-вторых, и что, по-видимому, наиболее важно, исследуемая система движется с ускорением, а уравнение Бернулли в строгом смысле применимо только в случае инерциальной системы. Тем не менее на первый случай этими эффектами можно пренебречь (впрочем, с некоторой степенью неуверенности!) и использовать записанные выше приближенные выражения. Если вводится коэффициент расхода C_N, то

$$V_j^2=\frac{2C_N(P_a-P_0)}{\rho_w}.$$

Однако в данном случае P_a — переменная, поскольку по мере выбрасывания воды воздух расширяется и давление падает. Давление можно связать с количеством воды. Расширение воздуха будет происходить с такой скоростью, что его можно считать обратимым адиабатным процессом. Для воздуха справедливы следующие соотношения:

$$P_a\mathcal{V}_a^k=P_{a0}\mathcal{V}_{a0}^k=\text{const},$$

$$\mathcal{V}_a=\mathcal{V}_R-\mathcal{V}_w=\mathcal{V}_R-\frac{m_w}{\rho_w}.$$

Теоретически теперь мы располагаем достаточно независимыми уравнениями и можем найти переменные V_R, m, P_a и V_j как функции времени. Очевидно, однако, что эта система уравнений не имеет аналитического решения в явном виде. Необходимо получить численные решения, и для выполнения вычислений потребуется цифровая вычислительная машина.

Покажем, как это делается. Записывая уравнение количества движения через конечные разности, получаем

$$(V_R)_{k+1}=(V_R)_k+A_j(V_j)_k^2\left(\frac{1}{m_k}\right)\Delta t-g\Delta t-\frac{C_D\rho_a A_R}{2m_k}(V_R)_k^2,$$

где индексы k и $k+1$ относятся к значениям массы и скорости соответственно в моменты k и $k+1$. Если заданы значения V_R, m и V_j в момент t (соответствующий k), то записанное уравнение позволяет вычислить скорость V_R в момент $t+\Delta t$ (соответствующий $k+1$). Если значение $(P_a)_k$ известно, то скорость $(V_j)_k$ можно найти по формуле

$$(V_j)_k^2=\frac{2C_N(P_a)_k-P_0}{\rho_w}. \qquad (1)$$

Если значение $(m_w)_k$ известно, то $(P_a)_k$ можно найти из соотношения

$$(P_a)_k\left[\mathcal{V}_R-\frac{(m_w)_k}{\rho_w}\right]^k=C=\text{const}; \qquad (2)$$

m_w можно найти из уравнения

$$\frac{dm_w}{dt}=-\rho_w A_j V_j, \qquad (3)$$

превращая его в уравнение в конечных разностях

$$(m_w)_{k+1}=-(m_w)_k\rho_w A_j(V_j)_k. \qquad (4)$$

Чтобы приступить к итерационному вычислительному процессу, необходимо знать или задать начальные значения m_w, P_a и V_R. Теперь по формуле (2) можно вычислить значение постоянной C и из соотношения (1) найти $(V_j)_k$. Величину $(V_R)_{k+1}$ можно найти с помощью уравнения количества движения и нового значения m_w, полученного из уравнения (4). С помощью выражения (2) находится новое значение P_a. Подставив его в соотношение (1), получаем новое значение V_j, которое затем подставляется в уравнение количества движения, чтобы найти новое значение V_R, и в уравнение (4), чтобы вычислить новое значение m_w, и т. д. Процесс итерации продолжается до тех пор, пока из полости ракеты не будет выброшена вся вода (см. задачу 10.9).

После того как вода выброшена, тяга больше не создается (если пренебречь небольшим количеством воздуха, который все еще остается под давлением). Уравнение движения принимает простой вид

$$-m_R g - C_D \frac{\rho_a V_R^2}{2} A_R = m_R \frac{dV_R}{dt}. \tag{5}$$

Это уравнение легко решить как численными, так и аналитическими методами, используя в качестве начального значения на данном участке полета конечное значение скорости из предыдущего численного решения (см. задачу 10.10).

Для реальной игрушечной ракеты были приняты следующие данные:

Вес ракеты $m_R = 0{,}0167$ *кг*
Объем ракеты $V_R = 75$ *см*^{3}
Площадь поперечного сечения сопла $A_j = 0{,}173$ *см*^{2}
Площадь поперечного сечения ракеты $A_R = 11{,}5$ *см*^{2}

Для решения записанных выше уравнений нужны и другие данные: атмосферное давление P_0, коэффициент расхода C_N и коэффициент аэродинамического сопротивления C_D. Для начала можно принять следующие значения:

Атмосферное давление $P_0 = 1$ *кГ/см*^{2}
Коэффициент расхода $C_N = 1{,}0$
Коэффициент аэродинамического сопротивления $C_D = 0{,}1$

Влияние изменения двух последних величин будет исследовано.

Решение уравнений позволяет получить ответы на вопросы, поставленные в начале этого раздела.

На какую высоту поднимается ракета при данном начальном давлении и объеме воды? См. рис. 10.4.

Какое количество воды является оптимальным? См. еще раз рис. 10.4.

Какая площадь поперечного сечения сопла является оптимальной? См. рис. 10.5.

Как влияет коэффициент аэродинамического сопротивления ракеты на высоту полета? См. рис. 10.6.

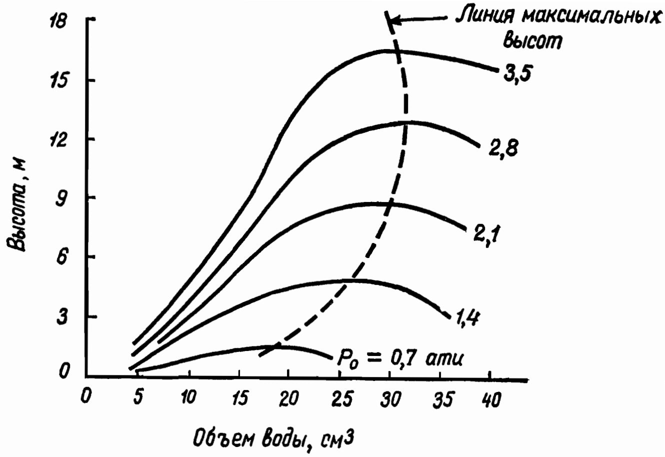


Рис. 10.4. Результаты инженерного анализа конструкции игрушечной ракеты.

Рис. 10.5. Влияние площади поперечного сечения сопла на высоту полета ракеты.
$C_D=0,10$, $C_N=1,0$, $P=2,8$ *ати*, $\mathcal{V}_{w_0}=28$ *см*³.

Как влияет коэффициент расхода на высоту полета? См. рис. 10.7.

Графики на рис. 10.8 позволяют сравнить фактические характеристики ракеты с результатами анализа. Обратите

Рис. 10.6. Влияние коэффициента аэродинамического сопротивления на высоту полета ракеты. $P_0=2{,}8$ *ати*, $\mathcal{V}_{w_0}=28$ *см*^{3}, $C_N=1{,}0$.

внимание на то, что, за исключением случая, когда избыточное давление составляет 2,1 *кГ/см*^{2} (*ати*), получаем довольно хорошее совпадение. Нам неизвестно, является это отклонение следствием ошибки, допущенной при анализе или же в ходе эксперимента. Каково ваше мнение?

10.6. Создание двухступенчатой игрушечной ракеты

Прежде чем приступать к чтению этого раздела, настоятельно рекомендуем решить задачу 10.12.

В рассматриваемой здесь разработке двухступенчатой ракеты мы снова сталкиваемся с двумя аспектами изобретательства. Каким образом впервые родилась идея двухступенчатой ракеты? И каким образом после того, как эта идея высказана, можно построить игрушечную двухступенчатую ракету? Наиболее вероятным ответом на первый вопрос является: «по аналогии с реальными ракетами».

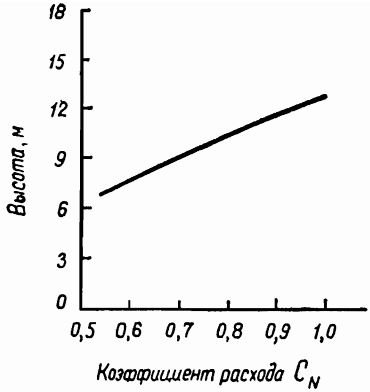


Рис. 10.7. Влияние коэффициента расхода на высоту полета ракеты. $P_0=2{,}8$ *ати*, $\mathcal{V}_{w_0}=28$ *см*^{3}, $C_D=0{,}10$.

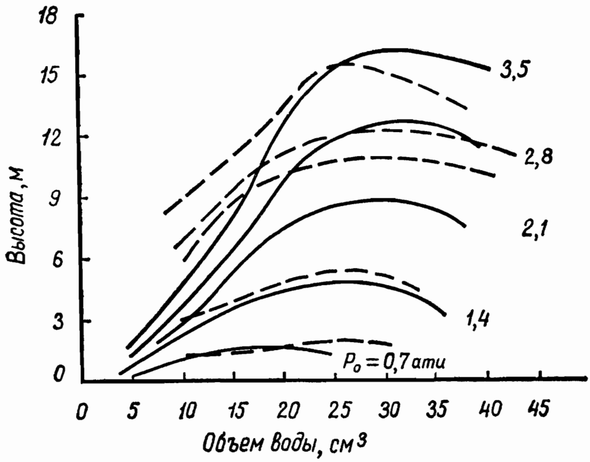


Рис. 10.8. Сравнение теоретических и экспериментальных данных о полете ракеты.

—— теоретические данные, — — — экспериментальные данные.

Второй вопрос — это поистине сложная проблема инженерного творчества (составляющая содержание задачи 10.2). Существует много различных способов решения этой задачи, и для генерирования идей можно применять все методы, рассмотренные в гл. 2. В одной из групп студенты за 20 *мин* составили следующий перечень идей:

1. Разрывные болты.

2. Бечевка, один конец которой закреплен, тянет рычаг, отделяющий ступень на заданной высоте.

3. Счетчик времени (возможно, с пружинным заводом) разъединяет ступени.

4. Сила инерции; когда тяга первой ракеты снижается, рычаг, удерживаемый силой инерции, перемещается и обеспечивает отделение второй ступени.

5. Счетчик времени, работа которого основана на использовании небольшого потока воды из второй ступени в первую.

6. Радиоуправление.

7. Датчик давления первой ступени.

8. Измеритель скорости; когда скорость падает, отделяется первая и запускается вторая ступень.

9. Растворимый в воде сепаратор как счетчик времени.

10. Сепаратор, который разрывается, когда разность давлений в двух ступенях ракеты становится достаточно большой.

11. Высотомер.

Читатели могут дополнить этот перечень своими собственными идеями и затем оценить различные идеи (см. задачу 10.13).

Для разработки фирма выбрала идею счетчика времени, работа которого основана на использовании небольшого потока воды через мерное сопло второй ступени в первую. На вопрос, почему была выбрана именно эта идея, президент фирмы ответил: «Мы поняли, что нам нужно использовать разность давлений и воду второй ступени, потому что *и то и другое уже имеется в ракете*».

Заметим, что такой подход основан на выборе *простейшего решения*. Если имеющиеся конструкционные элементы можно использовать непосредственно, то потребуется очень немного дополнительных устройств (см. задачу 10.14).

На рис. 10.9 показана схема механизма, который был разработан. Этот механизм работает следующим образом.

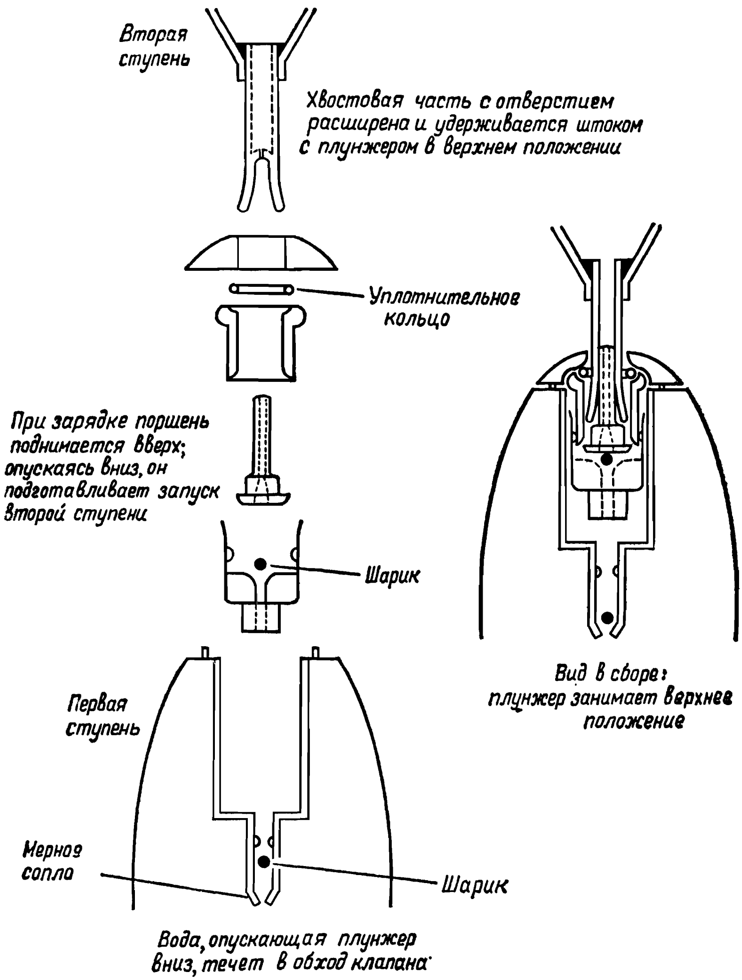


Рис. 10.9. Конструкция двухступенчатой ракеты.

Вода вводится в обе ступени ракеты и удерживается там с помощью шариковых клапанов. Первоначально шток с плунжером находятся в верхнем положении, удерживая вторую ступень за ее хвостовую часть. Затем с помощью ручного насоса в систему нагнетается воздух. После запуска системы начинается ее подъем и давление в первой ступени ракеты падает. Теперь существует разность давлений между ступенями, и наличие крошечного мерного сопла (счетчика) позволяет воде вытекать в обход нижнего шарикового клапана. По мере того как вода вытекает через обходный канал, поршень за счет более высокого давления во второй ступени опускается вниз. Когда шток с плунжером опустятся достаточно низко, плунжер перестает перекрывать отверстие, и появляется возможность создания тяги второй ступени ракеты. Момент отделения второй ступени определяется площадью крошечного отверстия в мерном сопле, пропускающего воду в обход нижнего шарикового клапана. Эта площадь составляет 5 $мм^2$. Расход через мерное сопло пропорционален разности давлений в ступенях ракет (давление в первой ступени теперь по существу уже равно атмосферному) и площади отверстия. Заметим, что чем выше первоначальное давление, тем меньше промежуток времени до момента отделения. Будет ли оно таким, как нужно? Читатели, интересующиеся этим сложным вопросом инженерного анализа, отсылаются к задаче 10.6.

10.7. Принятие решений при разработке двухступенчатой ракеты

Как уже указывалось ранее в этой книге, принятие решений происходит на всех этапах разработки. На каждом этапе возникают вопросы экономического и технического характера, которые определенным образом связаны друг с другом. По существу принимается слишком много таких решений, чтобы можно было все их здесь рассмотреть (см. задачу 10.16). Однако один технико-экономический вопрос представляет особый интерес: какого размера должна быть каждая из ступеней ракеты?

Технические показатели не позволяют выявить общий диапазон возможных габаритов. Это означает, что приближенный размер или некоторый начальный размер должен устанавливаться не на основании технических факторов, а исходя из иных соображений. В данном случае общий размер определяется тем, что изделие является игрушкой. Она должна быть настолько большой, чтобы с ней можно было легко обращаться и наблюдать за ее полетом, но не больше, иначе сильно возрастают затраты на материалы. Тот факт, что фирма уже изготовляет два типа одноступенчатых ракет (одна длиной около 12,5 *см*, а другая около 18 *см*), оказывается основным и определяющим фактором при принятии решения о размере ракеты. Основанием для принятия решения является то, что технологическая оснастка для формования этих ракет уже есть и за нее уплачены деньги. Одна прессформа стоит от 20 до 40 тыс. долл. Таким образом, используя имеющиеся прессформы, можно добиться значительной экономии средств.

Ясно, что в этом случае одной ступенью двухступенчатой ракеты будет одна из существующих одноступенчатых ракет. Теперь выбор размера второй ступени нужно рассматривать как задачу оптимизации. Если выбранным критерием оптимизации является высота полета, то оптимизация будет основана на технических факторах. Для определения оптимума можно провести анализ или поставить эксперимент. Однако необходимо учитывать и другие важные критерии. Наиболее существенным из них является *стоимость*. В данном случае было бы намного дешевле для каждой ступени новой двухступенчатой комбинации взять *обе* прессформы, используемые для изготовления выпускаемых одноступенчатых ракет. Это минимизирует (оптимизирует) затраты на изготовление. Разумеется, только при случайном совпадении характеристики этой ракеты (например, высота полета) могут оказаться оптимальными. Как бы вы поступили, если нужно было бы принимать решение в том случае, когда комбинация, составленная из двух серийных ракет, работает достаточно хорошо, несмотря на то что оптимум так и не достигнут?

Разумеется, нужно использовать старые прессформы — именно это и было сделано. Обратите внимание на то, что здесь необходимо было чем-то поступиться. В этом конкретном примере достигнуть компромисса при выборе параметров было нетрудно. В реальных задачах освоения космического пространства так же легко могут быть приняты решения противоположного характера, т. е. там оптимизируют рабочие характеристики без учета затрат, если последние не превышают некоторого предельного значения. Однако противоречие очевидно: нельзя одновременно оптимизировать характеристики и затраты. И кто-то должен решать, какие именно решения нужно принимать. Такого рода ситуация, хотя и с большим числом элементов, выбор параметров которых (рабочие характеристики, затраты, надежность, внешний вид и т. д.) не возможен без компромисса, характерна для всех инженерных проектов. По этой причине возрастает интерес инженеров к изучению и применению различных теорий принятия решений. Несмотря на то что теория принятия решений — молодая научная дисциплина, ее аппарат развит далеко за рамки потребностей инженерного проектирования. Хотя в настоящее время эта теория еще находит ограниченное применение, однако совершенно очевидно, что в ближайшем будущем она будет иметь первостепенное значение для инженеров. По этой причине следующая часть этой книги посвящена процессу принятия решений.

10.8. Краткие выводы

Эта глава завершает рассмотрение инженерного анализа. Остальная часть книги посвящена процессам и методам принятия решений. Глава 11 является введением и служит обзором различных аспектов процесса принятия решений. В остальных главах рассматриваются конкретные процессы и методы принятия решений — оптимизация, теория вероятностей, математическая статистика, теория полезности, а также некоторые частные приложения, например теория надежности. Каждый из этих вопросов — тема, которую не исчерпать и несколькими книгами, поэтому то, что дается здесь,— это лишь введение в предмет или, как в ряде случаев, обзор. Применение в широких масштабах теории принятия решений при инженерном проектировании еще не получило распространения. На будущих инженеров, которые сегодня являются студентами и учатся применять эти методы, возлагается задача разработать новые важные приложения теории к инженерному проектированию.

Задачи

10.1. Обсудите целесообразность применения методов генерирования идей, рассмотренных в гл. 2, для фирмы-изготовителя пластмассовых игрушек, которая нуждается в новых изделиях.

10.2. Фирма по производству пластмассовых игрушек имеет неиспользованные производственные мощности.

1. Проведите занятие с целью получения методом «мозгового штурма» идей, используемых для конструирования новых видов изделий.

2. Используйте другие методы получения таких идей.

10.3. Рассмотрите влияние следующих факторов на ценность идей, используемых для создания пластмассовых игрушек:

а) тенденции и изменения в начальном школьном образовании;

б) крупные научные достижения;

в) крупные технические достижения.

10.4. Каким образом могли бы методы, рассмотренные в гл. 2, привести к появлению идеи воздушно-водяной игрушечной ракеты? к появлению идеи газогенератора?

10.5. Используйте методы, рассмотренные в гл. 2, с целью получения новых идей для конструирования игрушечных ракет различных типов.

10.6. Рассмотрите каждое из решений, которые необходимо было принять, чтобы построить график и получить данные, приведенные на рис. 10.5. Какие решения принимались по каждому параметру?

10.7. Допустим, что решено сделать ракету, изображенную на рис. 10.3, более крупной, с тем чтобы ее длина стала равной 18,5 *см*. Выполните чертеж ракеты, предлагаемой вами в качестве исходной конструкции, и расставьте обозначения, как показано на рисунке.

10.8. Составьте программу для вычислительной машины, предназначенную для решения последовательности уравнений (1) — (4) и уравнения количества движения. Подберите соответствующие данные и найдите время, за которое вода будет выброшена из ракеты.

Какой высоты достигнет ракета в этот момент? Какова ее скорость?

10.9. Составьте программу для вычислительной машины, предназначенную для решения уравнения (5). Найдите также его решение аналитическим методом. Подберите соответствующие данные и начальные условия и сравните полученные результаты.

10.10. Рассмотрите инженерный анализ одноступенчатой ракеты с точки зрения методики инженерного анализа, изложенной в этой книге. Выделите различные этапы. Не опущены ли какие-либо этапы? Можно ли применить более совершенную методику?

10.11. Проведите занятие, посвященное изобретательству (используя «мозговой штурм» или какой-либо другой метод), с целью изобретения двухступенчатой воздушно-водяной игрушечной ракеты. Каким образом эти ступени необходимо удерживать вместе и как их разделять?

10.12. Рассмотрите перечень принципов отделения второй ступени игрушечной ракеты, приведенный в этой главе, от первой ее ступени. Если бы вам пришлось принимать решение, то какое (или какие) из них вы бы предложили инженерам вашей фирмы исследовать более детально? Почему?

10.13. Разработайте механизм, позволяющий сочленять и удерживать вместе две ступени двухступенчатой игрушечной ракеты, а также отделять вторую ступень от первой, исходя из того, что если первая ступень работает, то между ступенями имеет место большая разность давлений, и что из второй ступени в первую может перетечь небольшое количество воды, пропорциональное Δp и времени.

10.14. Спроектируйте насос для игрушечной ракеты, рассмотренной в этой главе.

10.15. Спроектируйте двухступенчатую воздушно-водяную игрушечную ракету и проведите необходимый анализ.

10.16. Составьте список решений, которые необходимо принять при разработке двухступенчатой ракеты.

ЧАСТЬ III

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

ГЛАВА 11

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

11.1. Введение

В этой книге инженерное проектирование рассматривается состоящим из трех совершенно различных процессов интеллектуальной деятельности: изобретательства, инженерного анализа и принятия решений. В настоящей главе мы кратко познакомимся с третьим из них — процессом принятия решений.

Само по себе принятие решения есть *компромисс*. Принимая решения, необходимо взвешивать суждения о ценности, что включает рассмотрение экономических факторов, технической целесообразности и научной необходимости, а также учитывать социальные и чисто человеческие факторы. Принять «правильное» решение — значит выбрать такую альтернативу из числа возможных, в которой с учетом всех этих разнообразных факторов будет оптимизирована общая ценность.

Часто бывает необходимо несколько поступиться одной из характеристик (например, надежностью), с тем чтобы получить выигрыш в другой (например, в затратах). Задачей лица, принимающего решения, является отыскание альтернатив, представляющих собой оптимальный компромисс при учете всех рассматриваемых факторов.

В некоторых случаях оптимальный компромисс можно найти, обращаясь к научным методам принятия решений, т. е. используя математические методы оптимизации, теорию вероятностей, математическую статистику или теорию полезности. В других случаях принятие решений является исключительно сложным вопросом, который носит субъективный характер и предполагает учет неколичественных человеческих факторов и суждений о ценности. Однако наиболее часто при принятии решений производится учет как количественных, так и качественных факторов, которые должны рассматриваться одновременно. В последующих главах особое внимание будет уделено количественным методам принятия решений: теории оптимизации, теории вероятностей, математической статистике, теории полезности, однако в данной главе будет рассматриваться более общий процесс принятия решений. В частности, цель этой главы состоит в том, чтобы показать, что в настоящее время принятие решений является одновременно и искусством и наукой, и дать общее представление о процессе принятия решений.

Некоторые утверждают, что принятие решений по существу является искусством. Это убеждение прочно укоренилось в сознании многих людей, занятых в сфере административного и государственного управления, в торговле и даже в области инженерного проектирования. Однако появление вычислительной техники и успехи, достигнутые в разработке научных методов принятия решений, привели к изменению этих взглядов. Ранее считалось, что принятие решений носит полностью качественный характер и является субъективным делом. В настоящее время в этой области интенсивно внедряются количественные методы. Сказанное особенно справедливо в отношении принятия решений в военном деле. Разумеется, существует опасность переоценки этой тенденции. Однако в любом случае очевидно, что принятие решений основывается и на искусстве, т. е. носит качественный характер, и на количественных научных методах.

11.2. Характеристики процесса принятия решений

Принятие решений является своего рода решением задачи. Каковы же существенные черты процесса принятия решений?

Ситуацию, в которой происходит принятие решений, характеризуют следующие основные черты:

1. *Наличие цели*. Необходимость принятия решений диктуется наличием некоторой цели, которую необходимо

достичь: например, выполнить задание, выбрать материал, назначить свидание девушке, выполнить новую работу и т. д. Если же цель не поставлена, то и не возникает необходимости принимать какое-либо решение.

2. *Наличие альтернативных линий поведения.* Решения принимаются в условиях, когда существует более одного способа достижения цели. Очевидно, что если существует лишь одна линия поведения, то выбора нет и решения принимать не требуется. С различными альтернативами могут быть связаны различные затраты и различные вероятности успеха. Эти затраты и вероятности не всегда могут быть известны. Именно по этим причинам принятие решений часто сопряжено с неясностью и неопределенностью.

3. *Учет существенных факторов.* Решения принимаются в условиях действия большого числа факторов, которые, однако, различны для различных альтернатив. Это факторы экономического, технического, социального, личного и иного характера.

Итак, задача принятия решений возникает в том и только в том случае, когда существует цель, которую нужно достичь, когда возможны различные способы ее достижения и когда имеется большое число факторов, определяющих ценность различных альтернатив или вероятность успеха каждой из них. Теперь рассмотрим более подробно каждую из этих трех характеристик в отдельности применительно к принятию решений при инженерном проектировании.

11.3. Цель решений, принимаемых при инженерном проектировании

Внимательное рассмотрение процесса принятия решений с целью его лучшего уяснения приводит к необходимости четкого определения целей и задач. Декан Дартмусского колледжа М. Трайбус удачно описал проектирование технических систем как задачу оптимизации некоторой «функции платежа». Функцией платежа может быть какой-либо один параметр (например, затраты или вес), либо это может быть взвешенная комбинация двух или большего числа параметров. По существу функция платежа является целью, и поэтому, прежде чем можно будет обоснованно принять окончательное решение, ее необходимо четко определить. Как мы увидим далее, если функции платежа или цели можно дать простое количественное определение, то оказывается возможным применение научных методов принятия решений. Однако нередко цели или во всяком случае непосредственно связанные с ними факторы являются как количественными (объективными), так и качественными (субъективными). В этих случаях для применения научных методов принятия решений нужны зрелость суждений и дальновидность, а также аналитическое и математическое мастерство.

Некоторые из обычных целей принятия решений при инженерном проектировании перечислены ниже, однако этот список нельзя считать исчерпывающим. Следует также помнить, что иногда для достижения поставленной цели требуется установить баланс между двумя или большим числом рассматриваемых факторов, причем в определенных ситуациях некоторые из них будут входить в задачу как ограничения, а не как компоненты поставленной цели. Это означает, что в таком утверждении, как «вес не должен превышать 20 *кг*», низкий вес может рассматриваться как цель, а не как ограничение. Более подробно ограничения рассматриваются далее в этой главе. Некоторыми целями при инженерном проектировании являются следующие: начальные затраты, стоимость эксплуатации или обслуживания в течение определенного периода времени, надежность, вес, рабочие характеристики, к. п. д., внешний вид, безопасность, прибыль в течение определенного периода времени и т. д.

11.4. Альтернативы в инженерных решениях

Лица, принимающие решения, часто (к сожалению) не осознают важности составления списка альтернатив. Совершенно очевидно, что в конечном счете может быть выбрана не самая лучшая альтернатива из числа рассматриваемых. В этом смысле качество выбора ограничено качеством альтернатив. Исчерпывающий список имеющихся альтернатив оказывает большую помощь при принятии решений. Принятие решений есть выбор одной из альтернатив, и составление их списка является неотъемлемой частью этого процесса.

В некотором смысле составление списка альтернатив совершенно аналогично определению задачи при инженерном анализе. Когда альтернативы неопределенны, список их неполон или даже непродуман, принять решение невозможно. Однако, когда альтернативы четко перечислены, задача больше не является неосязаемой. Теперь мы уже имеем совершенно конкретную задачу выбора одной из перечисленных альтернатив.

Составление списка альтернатив перед принятием решений в основном является творческим этапом. Здесь с успехом можно применять многие методы получения новых полезных идей, рассмотренные в гл. 2.

Имеется одна альтернатива, которая почти всегда, во всяком случае в самом начале, присутствует в любом списке. Это альтернатива — не принимать решения вообще. Иногда (и только иногда) оптимальным компромиссом будет отложить принятие решения, чтобы иметь больше времени для накопления новых фактов. Если же цель должна быть достигнута немедленно, то, разумеется, обычно нельзя откладывать принятия решений на неопределенно долгий срок.

11.5. Факторы, рассматриваемые при принятии инженерных решений

В любой задаче принятия инженерных решений по существу можно выявить бесконечное множество факторов. Любая попытка составить их полный перечень или подробно их анализировать сопряжена с опасностью опустить некоторые реальные и важные факторы. Различные факторы, подлежащие рассмотрению, можно разделить на три группы и затем привести примеры самого общего характера. Основными группами факторов являются: факторы, связанные с *ресурсами*, *технические факторы* и *чисто человеческие факторы*.

Под факторами, связанными с ресурсами, понимают *время*, *денежные средства и производственные возможности*. Под производственными возможностями здесь подразумеваются такие разнообразные вещи, как наличие материалов, деталей, техническое и научное мастерство, организационные возможности и т. д. Данные, приведенные в табл. 11.1, содержат более конкретную информацию о том, что

Таблица 11.1

Ресурсы, учитываемые при принятии инженерных решений

1. *Финансы.*

Каковы будут затраты и прибыль? Какую сумму нужно получить в виде краткосрочного займа и какую — в виде долгосрочного? Имеются ли эти средства? Для каких других проектов необходимы средства? Каковы перспективы данной отрасли промышленности, фирмы и отдела? Каковы конкурентные возможности?

2. *Оборудование и помещения для проведения научно-исследовательских и проектных работ и средства производства.*

Какое оборудование, помещения и средства производства необходимы? Что имеется? Сколько времени потребуется, чтобы достать его, и во что это обойдется?

3. *Специалисты для научно-исследовательской работы, проектирования и производства.*

Какие специалисты нужны? Какие имеются? Сколько времени потребуется, чтобы найти их, и во что это обойдется?

4. *Исходные материалы.*

Имеются ли в наличии необходимые материалы? Какова их стоимость?

5. *Организация научно-исследовательских работ, проектирования производства и сбыта.*

Какие вспомогательные организации (административно-хозяйственный отдел, юридический отдел, отделы обслуживания, сбыта и рекламы и т. д.) необходимы?

Какие организации имеются? Если их нет, сколько времени потребуется для их создания и во что это обойдется?

6. *Ресурсы, связанные с принятием решений.*

Во что обойдется принятие решения? Сколько времени оно займет? Имеются ли специалисты, оборудование и т. д.?

подразумевается под факторами, которые относятся к группе ресурсов. Для инженерных решений характерно, что без специального изучения или исследования информация о существенных сторонах таких факторов может оказаться недостаточно полной.

К техническим факторам относятся факторы, которые непосредственно связаны с инженерным анализом или выработкой требований к конструкции. Обычно технические факторы являются конкретными и выражаются количественно. Список таких факторов приведен в табл. 11.2.

Таблица 11.2

Технические факторы, учитываемые при принятии инженерных решений

1. Геометрические факторы — габариты и форма.
2. Вес — общий и отдельных элементов.
3. Прочность — какое звено является слабым?
4. Динамика — колебания, частота собственных колебаний.
5. Первый закон термодинамики.
6. Второй закон термодинамики.
7. Электрические эффекты.
8. Магнитные эффекты.
9. Коррозия.
10. Усталость — тепловая или вызываемая напряжением.
11. Ползучесть.
12. Теплопередача — теплопроводностью, конвекцией, излучением.
13. Температурные эффекты.
14. Эффекты, связанные с потоком жидкости, — гидродинамическое сопротивление, трение, расход.
15. Количество движения.
16. Износ — смазка.
17. Энергия — источник, мощность.
18. Инерция.
19. Другие факторы.

Эти технические факторы часто определяют один из трех видов ограничений: функциональные, областные и экстремальные. Функциональным ограничением является точное задание рабочих характеристик, входных параметров или других ограничений. Функциональные ограничения всегда выражаются в виде равенства: например, «длина должна быть равна 12 *см*» или «расход должен составлять 60 *л/мин*».

Областные ограничения отличаются от функциональных лишь тем, что они выражаются неравенствами. Примерами областных ограничений являются: «длина должна быть меньше 12 *см*» или «расход должен быть больше 60 *л/мин*».

Экстремальные ограничения требуют, чтобы некоторый параметр был как можно больше или как можно меньше. Они требуют, чтобы рассматриваемый параметр в определенном направлении имел наибольшее или оптимальное значение. Очевидно, что экстремальные ограничения приводят к проблемам оптимизации. Примерами экстремальных ограничений являются следующие: «длина должна быть как можно меньше» или «расход должен быть как можно больше».

Кроме ресурсов и технических факторов, в ходе принятия инженерных решений важную роль играют чисто человеческие факторы. Эти факторы выражают не только требования политической или социальной целесообразности осуществления или достижения альтернативы, но и требования человеческой этики и морали. Для принятия правильного решения требуется не только техническая компетентность в оценке ресурсов и технических факторов, но и учет чисто человеческих факторов. В табл. 11.3 дается более полный список чисто человеческих факторов, оказывающих влияние на многие решения.

Таблица 11.3

Чисто человеческие факторы, оказывающие влияние при принятии инженерных решений

1. *Этика.*
2. *Мнения различных лиц о выбранной вами альтернативе.*
   Можете ли вы „подать" ее вашему начальнику, коллегам, подчиненным, клиентам, техническому персоналу и т. д.?
3. *Сопротивление перменам, боязнь нового и привычка к старому* (у начальника, коллег, подчиненных, клиентов и т. д.).
4. *Эстетические факторы.*
5. *Престиж и общественное положение.*
6. *Личные привязанности, вкусы и предубеждения.*
   (Собственные, фирмы, общества, начальника, коллег, технического персонала и т. д.)
7. *Ваши отношения с женой, ваше самочувствие, болезнь вашего сына, болезнь сына вашего начальника и т. д. и т. п.*
8. *Сострадание, любовь, ненависть, страх и т. д.*
9. *Другие факторы.*

11.6. Научные методы принятия решений

Существует несколько областей науки и техники, которые можно назвать наукой о принятии решений. Одной из них, название которой наиболее полно отражает существо вопроса, является теория полезности, представляющая собой попытку построения единой научной теории принятия решений. Однако эта теория еще настолько молода, что отдельные способы и методы принятия решений по-прежнему мало связаны друг с другом и безусловно заслуживают специального изучения. В числе этих более или менее независимых областей знания находятся теория оптимизации, теория вероятностей, математическая статистика и сама теория полезности. Каждой из этих научных дисциплин посвящена одна из последующих глав. Здесь дается лишь краткое описание каждой из них.

Оптимизация предполагает определение значений регулируемых параметров (при ограничениях), приводящих к экстремальному значению оптимизируемого параметра. Функция, выражающая оптимизируемый параметр, называется целевой функцией. Таким образом, элементами задачи оптимизации являются *целевая функция*, *ограничения и регулируемые параметры*. Математические методы оптимизации описывают пути нахождения параметров, которые максимизируют (или минимизируют) целевую функцию при различных ограничениях. К методам, рассматриваемым в гл. 12, относятся дифференциальное исчисление, метод множителей Лагранжа, вариационное исчисление и различные численные методы.

Теорию вероятностей иногда называют наукой недостоверных выводов. Теория вероятностей дает (в определенных случаях) способ задания числовых значений степени неопределенности, которой можно характеризовать рассматриваемое конкретное событие. Совершенно очевидно, что редко решения принимаются при полном знании всех обстоятельств и что, следовательно, в современных условиях при принятии решений важно знать теорию вероятностей. Теории вероятностей посвящена гл. 13.

Математическая статистика имеет дело с числовыми данными или результатами наблюдений. Она занимается изучением того, каким образом осмыслить и обработать полученные данные и сделать правильные выводы. Вероятностные модели (теоретические распределения) используются как средство принятия статистических решений, и, таким образом, эти две дисциплины — теория вероятностей и математическая статистика — тесно связаны друг с другом. Математическая статистика рассматривается в гл. 14.

Относительно новым приложением теории вероятностей и математической статистики, имеющим большое значение при инженерном проектировании, является *теория надежности*. Роль теории надежности все более возрастает в связи с ростом массового производства очень сложных машин (например, автомобилей) и с появлением потребности в высоконадежных сложных системах (например, пилотируемых космических аппаратов). Гл. 15 содержит введение в теорию и практику надежности.

Наконец, в настоящее время ведутся интенсивные исследования в новой интересной области знаний, называемой теорией полезности. Хотя до сих пор эта теория находила применение главным образом в сфере административного управления, в торговле и военном деле, в будущем она может найти применение и при решении некоторых инженерных задач. Теория полезности дает способ измерения ценностей различного рода по единой шкале полезности. Теория принятия решений имеет дело с выбором стратегий с целью оптимизации вероятности получения максимального значения на шкале полезности. Введение в этот предмет излагается в гл. 16 наряду с очень кратким обзором некоторых других методов, которые более или менее связаны с принятием решений в сфере административного управления при инженерном проектировании.

11.7. Рациональный порядок принятия решений

Ранее в этой главе уже говорилось, что в процессе принятия решений предполагается наличие цели, ряда альтернатив и ряда факторов, которые должны рассматриваться, и, возможно, некоторой неопределенности относительно возможных последствий различных альтернатив. В предыдущем разделе были кратко описаны некоторые известные методы принятия решений: теория оптимизации, математическая статистика, теория вероятностей и теория полезности. Однако в большинстве случаев между формулировкой задачи принятия решений и применимостью одного из названных научных методов существует большой разрыв. Другими словами, принятие решений в значительной мере является «искусством». Прежде чем задача принятия решений примет форму, поддающуюся анализу одним из научных методов, необходимо рассмотреть большое число факторов и исключить многие альтернативы. До этого решение можно принять лишь субъективно либо путем угадывания. Важно как можно полнее уяснить обстоятельства, в которых происходит принятие решений. Для этой цели здесь кратко излагается методика преобразования ситуации принятия решений к такому виду, когда становится возможным применение одного из разнообразных научных методов:

1. Формулируется цель.

2. Составляется возможно более полный список альтернатив. Здесь необходимы творческий подход и изобретательность.

3. Составляется возможно более полный перечень факторов. (Здесь могут помочь контрольные списки, например, такие, как в табл. 11.1—11.3.)

4. Список рассматриваемых факторов используется для уменьшения числа альтернатив, при этом обращается внимание на причину исключения каждой альтернативы. На данном этапе можно увидеть, что многие альтернативы нереальны. Другие альтернативы могут оказаться в высшей степени нецелесообразными. Этот процесс может быть крайне субъективным, и в некоторых случаях он строится на догадках. Однако если нужно принять решение, то другого выбора нет. В построении этих субъективных догадок и вынесении суждений о ценности как раз и проявляется искусство лица, принимающего решение. Следует помнить, что одной из альтернатив может быть альтернатива вообще не принимать никакого решения в данный момент, пока один из факторов (например, время) не исключит эту альтернативу из списка.

5. Оставшиеся альтернативы используются для сокращения списка факторов, часть которых теперь уже можно не рассматривать. Другие факторы могут в одинаковой степени относиться ко всем оставшимся альтернативам, и поэтому их тоже не нужно больше рассматривать.

6. После выполнения перечисленных выше шагов получим один из следующих вариантов:

а. Если *больше не осталось альтернатив*, нужно приложить больше творческих усилий для составления нового списка альтернатив.

б. Если исключены *все факторы, влияющие на выбор альтернатив*, следует воспользоваться случайным выбором, чтобы остановиться на одной альтернативе из числа оставшихся.

в. Если *осталась только одна альтернатива*, то решение будет принято совершенно субъективно. Если вас это устраивает, прекрасно. Если же нет, то вернитесь немного назад, но не будьте столь придирчивы к тем альтернативам, которые ранее показались вам неприемлемыми.

г. Если *останется только один фактор*, влияющий на выбор, то обычно не представляет труда отыскать наилучшую альтернативу. Если факторы исключались осторожно, то можно считать, что решение принято.

д. Если позволяют условия, можно использовать описанные выше научные методы принятия решений, которые более подробно рассматриваются в нескольких последующих главах.

е. Если ситуация остается все еще слишком сложной и возможен лишь субъективный подход, а применение научных методов принятия решений невозможно, то необходимо вернуться к выполнению п. 2, стараясь четко представить себе причины исключения различных альтернатив. Такой перечень причин может служить превосходным списком слабых сторон отдельного лица, фирмы или отдела.

Изложенный здесь кратко порядок принятия решений при инженерном проектировании отражает роль как искусства, так и научных методов и отводит и тому и другому свое место. Прежде чем переходить к последующим главам, где подробно рассматриваются различные научные методы принятия решений, следует остановиться еще на одном вопросе. При инженерном проектировании необходимо принимать *много* решений. В некоторых случаях инженеру нужно уметь принимать решения в условиях неопределенности и затем продолжать движение дальше. Вопрос о том, сколько времени нужно отводить на анализ альтернатив, в значительной мере является искусством. Кроме того, приходится решать вопрос о том, стоит ли придерживаться однажды принятого решения или необходим его пересмотр. Ответы на эти вопросы в свою очередь связаны с принятием определенных решений, однако в настоящее время они в значительной мере определяются вкусом, склонностями и личными качествами. Однако в определенной мере ваш успех как инженера зависит именно от этого.

11.8. Краткие выводы

В начале этой главы была высказана мысль, что принятие решения всегда связано с отысканием оптимального компромисса. Здесь обсуждался вопрос, является ли поиск компромиссного инженерного решения искусством или наукой, и был сделан вывод, что это и то и другое. Отмечалась важность понимания количественных факторов в процессе принятия решений и подчеркивалось их значение. Наконец, кратко был изложен рациональный порядок принятия решений, который должен служить там, где это окажется возможным, средством приведения сложного процесса принятия решений к задаче, которую можно решать с помощью математических методов, рассматриваемых в последующих главах. Первым из рассматриваемых здесь методов является оптимизация.

Задачи

11.1. Обсудите вопрос, каким образом можно учитывать наиболее важные человеческие ценности в задачах принятия решений, запрограммированных для решения на вычислительной машине.

11.2. Рассмотрите принятое вами в прошлом решение поступить в колледж или университет. Составьте список альтернатив, а также факторов, влияющих на это решение. Правильное ли решение вы приняли? Что показал опыт?

11.3. Рассмотрите свое решение, принятое в то время, когда вам пришлось выбирать между высшим учебным заведением и работой. Перечислите факторы, повлиявшие на это решение. Каким образом ваши взгляды на ценности тех или иных вещей повлияли на ваше решение?

11.4. Инженеры, составившие проект плотины для регулирования паводковых вод в штате Нью-Йорк, приняли план, согласно которому резервации индейцев навсегда скроются под водой. Были предложены и другие планы. Каким образом вы подошли бы в данном случае к выбору альтернативы из числа возможных?

11.5. Для теплоизоляции дома можно выбрать минеральную вату или алюминиевую фольгу либо вообще можно оставить дом без тепловой изоляции. Возможны ли еще какие-нибудь альтернативы? Какие факторы влияют на выбор решения в данном случае?

11.6. Прочитайте соответствующую литературу и проведите некоторые исследования, с тем чтобы вы могли грамотно обсудить решение о возможно быстрейшей посылке человека на Луну.

11.7. В качестве возможных материалов для корпуса автомашины предложены алюминий и пластмасса. Какие еще альтернативы возможны. Какие факторы определяют это решение? Какой из них, по вашему мнению, наиболее важен?

11.8. Вы покупаете дом. Какую отопительную систему вы бы установили?

11.9. Допустим, что программа повышения надежности стоимостью x долларов позволит снизить вероятность аварии при орбитальном полете космонавта с 2 до 1%. Какие факторы вы бы использовали в качестве основания для принятия решения о целесообразности осуществления этой программы? Какое максимальное значение x вы считаете приемлемым?

ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ

1. Ackoff R. L., Gupta S. K., Minos I. S., Scientific Method: Optimizing Applied Research Decisions, John Wiley, New York, 1962.
2. Bronowski J., Science and Human Values, Julian Messner, Publishers, New York, 1956.

   Известный физик обсуждает связь науки с человеческими ценностями и этикой.
3. Churchman C. W., Prediction and Optimal Decision, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

   Серьезная книга по современной теории принятия решений, написанная ученым, одним из первых работавших в этой области.
4. Miller D. W., Starr M. K., Executive Decisions and Operations Research, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1960.

   Книга, посвященная принятию решений в сфере административного управления с использованием методов исследования операций.
5. Simon H., Models of Man, John Wiley, New York, 1957.

   Рассматривается главным образом взаимодействие человека с машиной.
6. Sorenson T. C., Decision Making in the White House, Columbia University Press, New York.

Книга о том, как президент Кеннеди принимал решения.

7. Wiener N., Cybernetics, Massachusetts Unstitute of the Technology, Cambridge, Mass., 1948.
   См. русский перевод Винер Н., Кибернетика, или управление и связь в животном и машине, М., «Советское радио», 1968.
   Более специальное изложение проблем принятия решений машинами и их влияние на людей.
8. Wiener N., The Human Use of Human Beings, Houghton Mifflin Company, Boston, 1950.
   См. русский перевод: Винер Н., Кибернетика и общество, М., ИЛ, 1958.
   Книга для неспециалистов, посвященная кибернетике и принятию решений машинами и людьми.

ГЛАВА 12

ОПТИМИЗАЦИЯ

12.1. Введение

Оптимизация играет важную роль при инженерном проектировании. Одной из целей любой разработки является достижение наилучших характеристик или наименьших затрат. Как уже указывалось в разд. 11.5, оптимизация состоит в отыскании таких значений регулируемых параметров, которые при наложенных ограничениях дают минимум целевой функции. Оптимизации подвергается целевая функция, и для применения каких-либо математических методов оптимизации необходимо, чтобы целевая функция была выражена через параметры. Часто целевой функцией является стоимость, однако ею может быть и какая-либо рабочая характеристика, некоторая комбинация параметров или какой-либо иной показатель, который инженер-разработчик желает максимизировать или минимизировать.

Смысл терминов *параметр*, *целевая функция* и *ограничения* попытаемся уяснить на примере. Рассмотрим задачу о теплоизоляции жилого дома. Допустим, что нам необходимо принять решение о толщине используемого теплоизоляционного материала. Поскольку цель усиления теплоизоляции — экономия денег, домовладелец стремится, естественно, свести к минимуму общие затраты. Здесь имеются два вида затрат: затраты на топливо и на теплоизоляционный материал. Стоимость топлива исчисляется за год, а теплоизоляция входит в состав первоначальных затрат. Последние, однако, легко превратить в ежегодные, используя простые методы экономических расчетов. Таким образом, в данном примере общие затраты C и являются целевой функцией, которую нужно минимизировать.

Единственным регулируемым параметром (если в данном примере не рассматриваются различные типы изоляционного материала) является толщина материала x. В данном случае задача состоит в нахождении такого значения x, при котором затраты C минимальны. Однако вначале необходимо выразить C через x. Полагая, что затраты на теплоизоляцию пропорциональны толщине теплоизоляционного материала, а затраты на топливо обратно пропорциональны его толщине, общие затраты можно выразить так

$$C = K_1 \frac{1}{x} + K_2 x,$$

где K_1 и K_2 обозначают соответственно затраты на топливо и затраты на теплоизоляцию. Разумеется, сделанные здесь допущения служат лишь для иллюстрации. Более реалистичными могут оказаться другие выражения для $C(x)$.

На толщину теплоизоляционного материала, кроме того, налагаются ограничения. Толщина материала не может превышать ширину промежутка между стенами (в современных американских домах эта ширина обычно равна 90 *мм*), а листового изоляционного материала тоньше 25 *мм* не бывает. Кроме того, вследствие нехватки средств могут налагаться ограничения на общую сумму первоначальных затрат. Все эти ограничения относятся к ограничениям областного типа, и их можно выразить следующим образом:

$$x \geqslant 25 \text{ мм}, \quad x \leqslant 90 \text{ мм}, \quad K_3 x \leqslant M,$$

где M — максимальная имеющаяся в наличии сумма денежных средств.

Прежде чем переходить к рассмотрению некоторых математических методов оптимизации, пригодных для использования в некоторых частных случаях, полезно сформулировать задачу оптимизации в общем виде. В общем случае эта задача формулируется следующим образом. Найти значения *параметров*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

при которых *целевая функция*

$$U = U(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

принимает максимальное или минимальное значение при функциональных ограничениях (равенствах)

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n) = 0,\\ \psi_2 &= \psi_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \psi_m &= \psi_m(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n) = 0\end{aligned}$$

и областных ограничениях (неравенствах)

$$\begin{aligned}l_1 &= l_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots x_n) \leqslant L_1,\\ l_2 &= l_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n) \leqslant L_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ l_p &= l_p(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n) \leqslant L_p.\end{aligned}$$

В этой главе будет рассмотрено пять методов решения частных задач этого типа: дифференцирование, метод множителей Лагранжа, численные методы, линейное программирование и вариационное исчисление. Будут даны примеры использования каждого метода.

12.2. Оптимизация путем дифференцирования

Часто функциональные ограничения отсутствуют, и в таких случаях иногда бывает возможно временно пренебречь областными ограничениями. Допуская, что целевая функция U дифференцируема, в этих случаях можно найти оптимум, взяв производную. Оптимум находится путем решения системы n уравнений, полученных приравниванием нулю производных от целевой функции по каждому из параметров

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0,\\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= 0,\\ &\ldots\\ \frac{\partial U}{\partial x_n} &= 0.\end{aligned}$$

В случае одного параметра этот метод эквивалентен нахождению точки, в которой тангенс угла наклона кривой U как функции x равен нулю. В случае двух параметров геометрическим отображением функции U является поверхность. Приравнивая одновременно $\partial U/\partial x_1$ и $\partial U/\partial x_2$ нулю, получаем точку с нулевыми тангенсами угла наклона и, следовательно, максимальное (или минимальное) значение функции U.

В качестве простого примера рассмотрим задачу о теплоизоляции дома, сформулированную в предыдущем разделе. Поскольку затраты на топливо пропорциональны толщине теплоизоляционного материала, можно допустить, что затраты на топливо составляют

$$C_{\text{топл}} = K_1 \frac{1}{x},$$

где K_1 — коэффициент, учитывающий удельные затраты на топливо, приходящиеся на единицу потерь тепла. Можно считать, что затраты на теплоизоляционный материал пропорциональны его толщине x; таким образом,

$$C_{\text{изол}} = K_2 x.$$

Следовательно, общие затраты равны

$$C = K_1 \frac{1}{x} + K_2 x.$$

Поскольку имеется только один параметр, его оптимальное значение находится из выражения

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -K_1 \frac{1}{x^2} + K_2 = 0,$$

откуда

$$x = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}.$$

Это оптимальное значение получено без учета областных ограничений. Если они удовлетворяются, то задача решена полностью. Если же они не удовлетворяются, то обычно решение находится путем использования в качестве ограничения соответствующего предельно допустимого значения. Так, если при вычислении $x = \sqrt{K_1/K_2}$ получаем, что требуемая толщина теплоизоляции должна быть не меньше 90 *мм*, то необходимо взять 90 *мм*. В этом случае знание того, что оптимальным значением является $x \leqslant 90$ *мм*, указывает на то, что наилучшим значением, которое можно получить, является $x = 90$ *мм*.

При наличии функциональных ограничений их обычно можно использовать до начала дифференцирования для уменьшения числа параметров, и, таким образом, основная задача не меняется. Допустим, например, что требуется построить цилиндрический резервуар емкостью 10 $м^3$ при наименьшем расходе материала. Таким образом, целевой функцией является площадь поверхности $A=2\pi r^2+2\pi r l$, а функциональное ограничение налагается на объем $V=\pi r^2 l=10$ $м^3$. Подставим выражение $V=\pi r^2 l$ в уравнение для A. В результате этого целевая функция принимает вид

$$A=2\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

Оптимизация дает

$$\frac{\partial A}{\partial r}=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=0$$

или

$$r=\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}=1{,}167 \text{ м}.$$

Так как $l=V/\pi r^2$, находим

$$l=\left(\frac{4V}{\pi}\right)^{1/3}=2{,}334 \text{ м}.$$

Заметим, что $l=2r$. Если налагается также областное ограничение, например радиус r не должен превышать 1 $м$, то будет изготовлен резервуар радиусом $r=1$ $м$, поскольку это значение наиболее близко к оптимальному значению, полученному при отсутствии областного ограничения.

12.3. Оптимизация методом двойственных переменных

Материал этого раздела основан на методе, изложенном Зенером [5]. Если желательно минимизировать функцию, состоящую из n членов, вида $u_1+u_2+\ldots+u_n$, то двойственные переменные a_1, a_2, ..., a_n можно определить следующим образом: $u_i=a_i x_i$. Затем можно использовать теорему, согласно которой

$$a_1 x_1+a_2 x_2+\ldots+a_n x_n \geqslant x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}.$$

Это неравенство превращается в равенство (и, следовательно, правая часть становится равной минимальному значению левой части) только в том случае, если все значения x

равны и $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Для целей оптимизации предыдущее неравенство лучше всего записать как

$$u_1+u_2+\ldots+u_n \geqslant \left(\frac{u_1}{a_1}\right)^{a_1}\left(\frac{u_2}{a_2}\right)^{a_2}\ldots\left(\frac{u_n}{a_n}\right)^{a_n}.$$

Пусть, к примеру, нужно оптимизировать целевую функцию $U=10t+20/t$; тогда $u_1=10t$ и $u_2=20/t$. Двойственная функция $V(a)$ получается следующим образом:

$$V(a)=\left(\frac{10t}{a_1}\right)^{a_1}\left(\frac{20}{ta_2}\right)^{a_2}.$$

Значение двойственной функции равно минимальному значению U, когда

$$a_1+a_2=1 \tag{1}$$

и когда совокупность значений двойственных переменных (a_1 и a_2) такова, что исходная переменная (или переменные) — в данном случае t — исключается из выражения для $V(a)$, т. е. при

$$t^{a_1}\left(\frac{1}{t}\right)^{a_2}=1. \tag{2}$$

Заметим, что если это условие выполняется, то

$$V(a)=\left(\frac{10}{a_1}\right)^{a_1}\left(\frac{20}{a_2}\right)^{a_2}. \tag{3}$$

Теперь, решая совместно уравнения (1) и (2), находим $a_1=1/2$ и $a_2=1/2$. Подставляя эти значения в уравнение (3), получаем минимальное значение целевой функции

$$V(a)=U_{\text{мин}}=20^{1/2}\cdot 40^{1/2}=28{,}2.$$

Теперь минимальное значение U определено, однако наилучшее значение t еще не найдено. В этом отношении существенную роль играют переменные a_i. Они определяют долю оптимальных затрат, связанных с каждым членом исходного выражения для U. Так, в данном случае на каждый член исходного выражения приходится половина общих затрат. Это позволяет легко вычислить значение t:

$$10t=\frac{1}{2}\cdot 28{,}2,\quad t=1{,}41,$$

или

$$\frac{20}{t} = \frac{1}{2} \cdot 28{,}2, \quad t = 1{,}41.$$

Следует заметить, что двойственные переменные не изменяются и, следовательно, не изменяется доля затрат, приходящаяся на каждый отдельный член, при изменении стоимостных коэффициентов (в данном примере 10 и 20).

Метод двойственных переменных сводит оптимизацию функции при отсутствии областных или функциональных ограничений (либо с функциональными ограничениями, учтенными в целевой функции) к решению системы алгебраических уравнений. Часто это можно выполнить проще и быстрее, чем приравнивая нулю различные частные производные.

Когда целевая функция содержит более одного параметра, условие исключения каждого параметра из двойственной функции $V(a)$ приводит к уравнению, выраженному через двойственные переменные a_i. Эти уравнения совместно с условием $\Sigma a_i = 1$ обычно (хотя и не обязательно) дают решение для переменных a_i. Если число переменных и число полученных уравнений неодинаково, то этот метод не применим.

12.4. Метод множителей Лагранжа

В предыдущем разделе функциональные ограничения использовались просто для уменьшения числа параметров. Иногда этот процесс и последующее дифференцирование нецелесообразны или невозможны. Метод множителей Лагранжа применим и при наличии функциональных ограничений. Областные ограничения могут быть использованы таким же способом, как и в предыдущем разделе. Существо этого метода состоит в следующем.

Необходимо оптимизировать целевую функцию $U = U(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, поэтому

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U}{dx_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Это выражение можно записать в более изящном виде как

$$dU = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

Функциональные ограничения имеют вид

$$\psi_1 = \psi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\psi_2 = \psi_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi_m = \psi_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0.$$

Дифференцируя каждое из них, получаем

$$d\psi_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} dx_i = 0,$$
$$d\psi_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} dx_i = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d\psi_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

Теперь каждое из этих m уравнений умножается на пока еще неизвестный параметр λ, называемый множителем Лагранжа, причем эти множители различны для разных уравнений. Результат имеет вид

$$\lambda_1 d\psi_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} dx_i = 0,$$
$$\lambda_2 d\psi_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} dx_i = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_m d\psi_m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

Если теперь сложить вместе все эти уравнения, прибавив к ним также уравнение для dU, то получим

$$dU + d\psi_1 + d\psi_2 + d\psi_3 + \ldots + d\psi_m = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0.$$

Поскольку все параметры x_i независимы, чтобы это уравнение удовлетворялось, каждый из n заключенных в скобки членов предыдущего уравнения должен равняться нулю. Отсюда получаем n уравнений вида

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x_i}+\ldots+$$
$$+\lambda_m\frac{\partial\psi_m}{\partial x_i}=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Напомним, что имеется также m уравнений, определяющих ограничения

$$\psi_j=0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Таким образом, имеется $m+n$ уравнений и $m+n$ неизвестных, в том числе n параметров x_i и m множителей Лагранжа λ_i. Решение этой системы $m+n$ уравнений дает искомое оптимальное значение.

В качестве первого примера рассмотрим задачу о резервуаре, решенную в предыдущем разделе путем дифференцирования. Целевой функцией является функция

$$A=2\pi r^2+2\pi rl,$$

причем

$$\frac{\partial A}{\partial r}=4\pi r+2\pi l,$$
$$\frac{\partial A}{\partial l}=2\pi r.$$

Уравнение, описывающее функциональное ограничение, имеет вид

$$\psi=V-\pi r^2 l=0,$$

и

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=-2\pi rl,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial l}=-\pi r^2.$$

Теперь можно получить три уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial r}+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial r}=0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial l}+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial l}=0,$$
$$\psi=0,$$

определяющих три неизвестных: r, l и λ. В данном случае уравнениями являются

$$\begin{aligned} 4\pi r + 2\pi l + \lambda(-2\pi r l) &= 0, \\ 2\pi r - \lambda \pi r^2 &= 0, \\ V - \pi r^2 l &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$\lambda = \frac{2}{r}, \quad l = 2r, \quad r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}.$$

Во многих инженерных задачах метод множителей Лагранжа используется для оптимизации расхода ресурсов или минимизации затрат. Инженеры-разработчики должны уметь пользоваться этим методом. Задачи с ограничениями по большому числу параметров приводят к системам уравнений, для решения которых требуется применение цифровых вычислительных машин.

12.5. Численные методы оптимизации

Если целевая функция содержит только один параметр, то очевидно, что оптимальное значение можно определить графически. В равной мере не представляет труда найти оптимальное значение численно, используя, если необходимо, цифровую вычислительную машину. Однако, когда рассматриваются два или большее число параметров, применение графических методов становится невозможным, а использование численных методов сопряжено с трудностями. В этом разделе будут рассмотрены два метода: вначале метод поочередного одномерного поиска, а затем более сложный метод наискорейшего спуска. Оба процесса минимизируют целевую функцию при отсутствии ограничений. Разумеется, функциональные ограничения могут быть введены в неявном виде, если их можно включить в целевую функцию для уменьшения числа параметров, а областные ограничения учитываются путем ограничения значений параметров заданной областью.

Рассмотрим для примера случай, когда имеются только два параметра. (В принципе этот метод легко распространить на случай большего числа параметров.) В данном случае можно представить себе, что целевая функция описывает поверхность в пространстве с двумя параметрами, которые можно рассматривать как координаты. Если отыскивается минимум, то искомой точкой является дно самой низкой впадины. Если требуется найти максимум, то искомой точкой является вершина самого высокого холма. В обоих описанных здесь методах необходимо сделать начальное предположение, суть которого сводится к тому, что точка находится где-то на самом высоком холме либо в пределах самой низкой впадины, смотря по тому, какой случай имеет место. Эти методы позволяют найти экстремум лишь в пределах данного холма или данной впадины, откуда начался поиск.

В методе поочередного одномерного поиска выбирается начальное значение каждого из двух параметров. Если этими двумя параметрами являются x_1 и x_2, то их начальные значения можно обозначить через x_{10} и x_{20}. Они определяют начальное значение целевой функции U_{00}. Если теперь параметру x_2 придать постоянное значение x_{20}, то параметр x_1 можно изменять до тех пор, пока не будет найдено минимальное (или максимальное) значение U. Поскольку здесь оптимизация осуществляется по одному параметру, ее легко выполнить графически, численными методами или, возможно, путем дифференцирования. Обозначим промежуточное «оптимальное» значение x_1 через x_{11}. В точке (x_{20}, x_{11}) значение функции U равно U_{10}. Теперь сохраняем неизменным значение x_{11} параметра x_1 и изменяем параметр x_2 до тех пор, пока при значении x_{21} не будет найдено новое оптимальное значение функции U, равное U_{11}. Далее сохраняем неизменными значение x_{21} параметра x_2 и изменяем параметр x_1 до получения нового оптимального значения. Подобным образом поступаем до тех пор, пока последовательные значения U при заданной погрешности можно будет рассматривать постоянными.

В качестве примера приведем следующую задачу. Необходимо спроектировать водопроводную линию для передачи большого количества горячей воды от нагревателя до места потребления. Предполагаемые затраты слагаются из четырех составляющих: затраты на перекачку воды, затраты на ее нагрев, стоимость сооружения водопровода и стоимость теплоизоляционного материала. Затраты на перекачку пропорциональны перепаду давления в трубах, который равен

$$\Delta p = f\frac{L}{D}\rho\frac{V^2}{2g_0}.$$

Для заданного расхода воды перепад давления можно выразить через диаметр трубы D

$$\Delta p = f\frac{L}{D}\frac{16\rho Q^2}{\pi^2 D^4}\frac{1}{2g_0}.$$

Потребляемая энергия будет равна

$$\frac{1}{\rho}\Delta p = f\frac{L}{g_0}\frac{8Q^2}{\pi^2 D^5}.$$

В данном примере будем считать, что стоимость энергии, необходимой для перекачки воды, можно выразить в следующей форме:

$$C_э = K_э\frac{1}{D^5}.$$

Затраты, обусловленные потерями тепла в трубах, примерно пропорциональны величине этих потерь, которые равны

$$q = \frac{2\pi k L \Delta t}{\ln[(D+x)/D]},$$

где D — внутренний диаметр трубы, а x — толщина теплоизоляции трубы. Тогда затраты можно записать просто как

$$C_т = K_т\frac{1}{\ln[(D+x)/D]}.$$

Будем считать, что стоимость трубы пропорциональна ее диаметру

$$C_{тр} = K_3 D.$$

Стоимость теплоизоляции приближенно пропорциональна ее толщине

$$C_{из} = K_4 x.$$

Таким образом, общие затраты можно выразить в следующей форме:

$$C = K_э\frac{1}{D^5} + K_т\frac{1}{\ln[(D+x)/D]} + K_3 D + K_4 x.$$

Разработчик хочет минимизировать эту функцию затрат, и с этой целью он может регулировать два параметра: D и x. Задача состоит в нахождении значений D и x, при которых затраты минимальны. Допустим, что постоянные имеют следующие значения:

$$K_э = 10{,}0, \quad K_т = 1{,}0, \quad K_3 = 0{,}50, \quad K_4 = 1{,}0.$$

Тогда затраты можно будет выразить так:

$$C = 1{,}0 \frac{1}{\ln [(D+x)/D]} + 10{,}0 \frac{1}{D^5} + 0{,}5D + 1{,}0x.$$

Чтобы использовать этот метод, необходимо найти начальную точку. В данном случае $D_0 = x_0 = 1{,}0$. Теперь, сохраняя значение x_0 постоянным, изменяем D_0 до тех пор, пока не будет найдено оптимальное значение. Если мы используем шаг 0,2, этим значением оказывается $D_1 = 1{,}8$. (На данном этапе не имеет смысла выполнять вычисления с большей точностью.) Теперь при $D = 1{,}8$ параметр x изменяется до тех пор, пока не будет достигнуто новое оптимальное значение $x_1 = 1{,}25$, и т. д. Результаты этих расчетов, выполненных на вычислительной машине, показаны в табл. 12.1. Окончательным результатом является $D = 1{,}85$ и $x = 1{,}37$. Таким образом, разработчик должен выбрать трубу с внутренним диаметром около 1,85 *см* и задать толщину тепловой изоляции около 1,37 *см*.

Теоретически применение данного метода возможно и в случае трех или большего числа переменных, однако при этом теряется его важное качество — обеспечение быстрой сходимости. (Заметим, однако, что этот метод легко видоизменить применительно к расчетам на вычислительной машине.) Можно обеспечить лучшее угадывание значений, рассматривая изменения как по x_1, так и по x_2 и вычисляя тангенс угла наклона в данной точке (x_{10}, x_{20}) поверхности (*градиент* — в векторной терминологии). Когда наклон известен, очевидно, что следующая точка должна браться в направлении, совпадающем с *наиболее крутым* наклоном. Поэтому данный метод называется методом наискорейшего спуска. Для удобства рассмотрим этот метод для случая отыскания минимума. Отыскание максимума производится совершенно аналогично.

Таблица 12.1

Результаты, полученные при оптимизации методом поочередного одномерного поиска

D	x	C	D	x	C
1,0	1,0	12,9427	1,81	1,25	4,5742
2,0	1,0	4,7789	1,82	1,25	4,5734
3,0	1,0	6,0172	1,83	1,25	4,5730
4,0	1,0	7,4912	1,84	1,25	4,5731
1,2	1,0	7,2686	1,83	1,25	4,5730
1,4	1,0	5,4146	1,83	1,30	4,5654
1,6	1,0	4,8234	1,83	1,35	4,5620
1,8	1,0	4,6925	1,83	1,40	4,5623
2,0	1,0	4,7789	1,83	1,31	4,5644
2,2	1,0	4,9629	1,83	1,32	4,5636
2,4	1,0	5,1967	1,83	1,33	4,5629
2,6	1,0	5,4571	1,83	1,34	4,5624
2,8	1,0	5,7326	1,83	1,35	4,5618
1,8	0,25	9,3684	1,83	1,36	4,5617
1,8	0,50	0,0088	1,83	1,37	4,5616
1,8	2,00	4,7675	1,83	1,38	4,5617
1,8	4,00	6,2839	1,83	1,39	4,5619
1,8	0,75	5,0503	1,81	1,37	4,5662
1,8	1,00	4,6925	1,82	1,37	4,5642
1,8	1,25	4,5755	1,83	1,37	4,5627
1,8	1,50	4,5790	1,84	1,37	4,5611
1,8	1,75	4,6516	1,85	1,37	4,5609
1,80	1,25	4,5755	1,86	1,37	4,5618

Допустим, что целевая функция $U=U(x_1, x_2)$ дифференцируема и в начальной точке (x_{10}, x_{20}) вычислены производные. Обозначим их значения через $(\partial U/\partial x_1)_0$ и $(\partial U/\partial x_2)_0$. Чтобы двигаться в направлении самого крутого наклона, необходимо выбрать его так, чтобы

$$\Delta x_1 \sim -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)_0$$

и

$$\Delta x_2 \sim -\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)_0 .$$

В обоих случаях коэффициент пропорциональности один и тот же. На рис. 12.1 показано *направление* движения, но не показано, *на сколько* нужно продвигаться. Коэффициент пропорциональности в этих двух уравнениях еще не определен. Было бы желательно двигаться в этом новом направлении до тех пор, пока функция U не обратится в нуль или не уменьшится. (В этой точке производится поиск нового направления наискорейшего спуска, и процесс повторяется.) Итак, пусть коэффициент пропорциональности равен y.

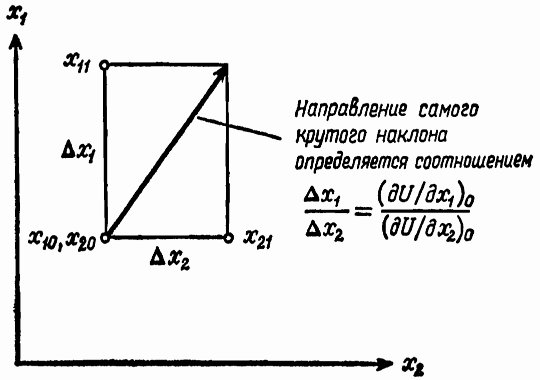


Рис. 12.1.

После перемещения на расстояние, соответствующее y, значения параметров становятся приближенно равными

$$x_1 = x_{10} - y\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)_0,$$

$$x_2 = x_{20} - y\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)_0$$

и целевой функцией будет

$$U = U\left\{\left[x_{10} - y\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)_0\right],\ \left[x_{20} - y\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)_0\right]\right\}.$$

Чтобы получить значение y при минимальном значении U, полагаем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Это значение U дает новые значения x_1 и x_2, которые могут служить исходными точками для последующей итерации.

Процесс нужно продолжать до тех пор, пока не будет найдена точка, в которой производные $\partial U/\partial x_1$ и $\partial U/\partial x_2$ достаточно близки нулю. Задачи, в которых рассматриваются три или большее число параметров, решаются точно так же, как рассмотренный пример с двумя параметрами. Этот метод легко видоизменить применительно к расчетам на вычислительной машине.

В качестве простого примера применения метода наискорейшего спуска рассмотрим функцию

$$U = 2x^2 + z^2.$$

Очевидно, что минимальное значение функция U принимает в точке $x=z=0$, однако для иллюстрации этого метода за начальную точку примем $x=z=1$. Для применения этого метода необходимо найти частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 2z.$$

Если заданы x_k и z_k, то выражения для x_{k+1}, z_{k+1} имеют вид

$$x_{k+1} = x_k - y\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_k = x_k - y\,(4x_k),$$

$$z_{k+1} = z_k - y\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_k = z_k - y\,(2z_k).$$

Для нахождения y вычисляется целевая функция в точке $(x_{k+1},\ z_{k+1})$:

$$U_{k+1} = 2\left[x_k - y\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_k\right]^2 + \left[z_k - y\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_k\right]^2.$$

Наилучшее значение y находим из уравнения

$$\frac{\partial U_{k+1}}{\partial y} = -4\left[x_k - y\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_k\right]\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_k - 2\left[z_k - y\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_k\right]\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_k = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно y, в данном случае получаем

$$y = \frac{-4x_k\,(\partial U/\partial x)_k - 2z_k\,(\partial U/\partial z)_k}{4\,(\partial U/\partial x)_k^2 + 2\,(\partial U/\partial z)^2} = \frac{-16x_k^2 - 4z_k^2}{64x_k^2 + 8z_k^2}.$$

Таким образом, для начальной точки $x_0=z_0=1$ имеем

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0=4, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_0=2, \quad y=-\frac{5}{18}.$$

Отсюда находим

$$x_1=-\frac{1}{9} \quad \text{и} \quad z_1=\frac{4}{9}.$$

Используя эти значения снова как начальные точки, получаем

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1=-\frac{4}{9}, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_1=\frac{8}{9}, \quad y=0{,}416,$$

откуда находим

$$x_2=+0{,}074 \quad \text{и} \quad z_2=+0{,}074.$$

Теперь повторяем процесс до тех пор, пока производные $\partial U/\partial x$ и $\partial U/\partial z$ не станут достаточно близкими нулю. Это указывает на то, что достигнуто оптимальное значение. Как можно видеть, мы подошли довольно близко к решению $x=z=0$ лишь за две итерации. Для решения более сложных задач необходимо применение вычислительных машин.

Многие задачи оптимизации связаны с использованием целевых функций, которые изменяются как обратно, так и прямо пропорционально параметрам (входящих в различные члены). Для случая одного параметра примером является целевая функция, используемая в задаче о толщине теплоизоляционного материала:

$$U=K_1\frac{1}{x}+K_2x,$$

где x — параметр. В случае двух или большего числа параметров такая функция часто принимает вид

$$U=K_1\frac{1}{x^a z^b}+K_2x^c+K_3z^d.$$

Вследствие существования бесконечного многообразия задач оптимизации, конечно, нет типичной или стандартной формы целевой функции. Однако данная функция является довольно типичной. Во втором примере, иллюстрирующем метод наискорейшего спуска, положим, что все постоянные и все показатели степени равны единице

$$K_1=K_2=K_3=a=b=c=d=1.$$

Таким образом,

$$U=\frac{1}{xz}+x+z.$$

Чтобы использовать наискорейший спуск, найдем производные

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{x^2z}+1,\qquad \frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{1}{xz^2}+1.$$

Кроме того,

$$U_{k+1}=\frac{1}{[x_k-y\,(\partial U/\partial x)_k]\,[z_k-y\,(\partial U/\partial z)_k]}+ \\ +\left[x_k-y\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_k\right]+\left[z_k-y\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_k\right].$$

Найдем y из уравнения

$$\frac{\partial U_{k+1}}{\partial y}=-\frac{(\partial U/\partial z)_k}{[x_k-y\,(\partial U/\partial x)_k]\,[z_k-y\,(\partial U/\partial z)_k]^2}- \\ -\frac{(\partial U/\partial x)_k}{[x_k-y\,(\partial U/\partial x)_k]^2\,[z_k-y\,(\partial U/\partial z)_k]}- \\ -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_k-\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_k=0.$$

После выбора начальной точки легко вычислить производные, и данное уравнение сводится к уравнению с единственной неизвестной y. При использовании этого метода на данном этапе обычно получают комплексные трансцендентные уравнения, для решения которых требуется применение вычислительных машин. Когда значение y получено, новые значения параметров, как обычно, находят по формулам

$$x_{k+1}=x_k-y\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_k,\qquad z_{k+1}=z_k-y\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_k,$$

и процесс повторяют до тех пор, пока не достигается искомый оптимум. Как можно было видеть, метод наискорейшего спуска обычно целесообразно использовать при наличии вычислительных машин и только в тех случаях, когда число параметров больше двух. Задачу с двумя параметрами обычно лучше всего решать методом поочередного одномерного поиска, кратко рассмотренным нами в начале этой главы.

12.6. Линейное программирование

В ряде случаев требуется оптимизировать величину, которая является линейной функцией параметров:

$$U = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k.$$

Обычно эту задачу можно свести к такому виду, что искомыми величинами могут служить только положительные значения параметров:

$$\begin{aligned} x_1 &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0, \\ &\ldots \\ x_k &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Если дополнительные областные ограничения являются *линейными* неравенствами

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k &\leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k &\leqslant b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k &\leqslant b_m, \end{aligned}$$

то эта задача называется *задачей линейного программирования.*

Если рассматриваются два или три параметра, то задача оптимизации этого типа довольно просто решается графически. В качестве примера рассмотрим функцию

$$U = 3x_1 + 5x_2,$$

которую нужно максимизировать при следующем ограничении:

$$2x_1 + 4x_2 \leqslant 8.$$

Предполагается, что параметры определены таким образом, что искомыми величинами могут служить лишь их положительные значения. В данном случае равенство показывает, что все точки, которые лежат относительно начала координат за прямой, определяемой уравнением

$$2x_1 + 4x_2 = 8,$$

нам не подходят. Эта прямая показана на рис. 12.2. Уравнение

$$U = 3x_1 + 5x_2 = 0$$

определяет прямую, показанную пунктиром и проходящую через начало координат. Имеется семейство прямых, параллельных данной, каждая из которых соответствует различным значениям функции U. Как показано на рисунке, наибольшее возможное значение проходит через точку с координатами ($x_2=0, x_1=4$). Таким образом, максимальное

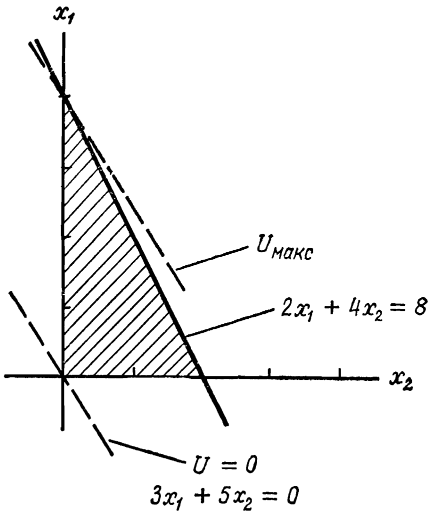


Рис. 12.2.

значение функции U в данном случае равно 12, и задача решена. Следует заметить, что максимальное значение функция U принимает в одной из вершин контура, определяющего область допустимых значений.

Если рассматриваются три параметра, то получить графическое решение будет уже трудно. Когда число параметров больше трех, получить графическое решение невозможно. Для решения задач линейного программирования разработаны различные итерационные приемы, описанные в учебниках по исследованию операций (см. литературу в конце главы). Для инженера очень важно распознавать ситуации, приводящие к задачам линейного программирования, а также уметь формулировать такие задачи. С этой целью мы рассмотрим здесь несколько таких примеров.

Пример 1. Некоторая фирма производит металлические винты двух типов. Винты типа A изготавливаются из нержавеющей стали, а винты типа B — из мягкой стали. Была подсчитана прибыль, получаемая от винтов каждого типа. Оказалось, что она составляет 2 долл. на тысячу винтов типа A и 1 долл. на тысячу винтов типа B. Однако вследствие того, что нержавеющая сталь имеет большую твердость, процесс изготовления винтов из нее более длителен. Если на всех станках изготавливать винты типа A, то за день можно изготовить 100 тыс. винтов. Если же изготавливать только винты типа B, то за день можно изготовить лишь 20 тыс. винтов. Вследствие ограниченной емкости склада для хранения готовой продукции проблем, связанных с ее отгрузкой, а также определенных сроков поставки суточное потребление сырья не может превышать норму, необходимую для изготовления 65 тыс. винтов. Кроме того, суточной нормы нержавеющей стали хватает только на 15 тыс. винтов.

Это простая задача линейного программирования для двух параметров. Пусть x_A и x_B — число винтов типа A и типа B в тысячах штук соответственно, производимых ежедневно. Тогда целевой функцией, которую надлежит максимизировать, является прибыль

$$U = 2x_A + x_B.$$

Налагаются следующие ограничения: на общее количество продукции

$$5x_A + x_B \leqslant 100;$$

на общее количество используемого материала

$$x_A + x_B \leqslant 65;$$

на наличие нержавеющей стали

$$x_A \leqslant 15.$$

Таким образом, задача сформулирована как типичная задача линейного программирования.

Пример 2. На небольшом заводе алюминиевых изделий имеются два штамповочных пресса, с помощью которых штампуют изделия трех классов: изделия 1-го класса продаются по 23 *цент/кг*, изделия 2-го класса — по 26 *цент/кг*, а изделия 3-го класса — по 40 *цент/кг*. Часовая производительность пресса при изготовлении изделий 1-го класса составляет 2000 *кг*, изделий 2-го класса — 1500 *кг* и изделий 3-го класса — 1000 *кг*. Стоимость эксплуатации пресса одинакова при любой производительности. Фирма должна закупать специальный сплав С для изделий 3-го класса по цене 25 *цент/кг*. Этот сплав можно приобретать в ограниченном количестве — не более 12 000 *кг* в сутки. Сплав В для производства изделий 2-го класса стоит 20 *цент/кг*, и его можно приобретать в любом количестве. В качестве сырья для изделий 1-го класса фирма использует металл собственной выплавки, поэтому это сырье обходится только 18 *цент/кг*. Производительность плавильного и литейного цехов не превышает 40 000 *кг*. Ограничения, налагаемые производительностью оборудования для термообработки и отделом отгрузки готовой продукции, не позволяют превышать суточный уровень производства 120 000 *кг*. Каким образом эта фирма должна регулировать свое производство, чтобы максимизировать прибыль?

Пусть x_1, x_2 и x_3— вес изделий каждого типа (в килограммах), производимых за сутки. Целевая функция имеет вид

$$U = 5x_1 + 6x_2 + 15x_3.$$

Выражение для ограничения на общую часовую производительность пресса имеет вид

$$x_1 + \frac{4}{3}x_2 + 2x_3 \leqslant 48\,000.$$

Поскольку имеются два пресса, выражение для ограничения принимает следующий вид:

$$x_1 + \frac{4}{3}x_2 + 2x_3 \leqslant 96\,000.$$

Ограничение на производительность плавильного цеха и цеха термообработки определяется выражением

$$x_1 \leqslant 40\,000.$$

Ограничение на общую емкость складского помещения имеет вид

$$x_1+x_2+x_3\leqslant 120\,000.$$

Наконец, ограничение на складское наличие сплава C определяется выражением

$$x_3\leqslant 12\,000.$$

Таким образом, задача сформулирована для решения ее методом линейного программирования.

12.7. Оптимизация распределенных систем — вариационное исчисление

До сих пор в настоящей главе рассматривались задачи и методы для случая систем с сосредоточенными параметрами. Однако во многих случаях требуется найти оптимальное решение для распределенной функции. Примером может служить задача о балке, рассмотренная в гл. 10. В задаче отыскания оптимального распределения требуется найти решение для непрерывной функции, а не для значений дискретных параметров (x_1, x_2, x_3 и т. д.). Часто в таких задачах ограничения содержат непрерывно меняющиеся функции или их интегралы.

Для решения задач такого рода можно использовать математический аппарат, называемый вариационным исчислением. Пусть дана дважды дифференцируемая функция F переменных x, y, dy/dx и интеграл I:

$$I=\int_{x_1}^{x_2} F\left(x,\ y,\frac{dy}{dx}\right)dx.$$

Найдем функцию $y=y(x)$, оптимизирующую интеграл I. В учебниках по вариационному исчислению показано, что искомая функция y удовлетворяет следующему условию (называемому условием Эйлера):

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\,\frac{df}{dy'}=0,$$

где $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Вопрос об ограничениях будет рассмотрен ниже. Вначале в качестве примера допустим, что требуется найти такую функцию $y=y(x)$, чтобы длина линии между точками A и B на рис. 12.3 была минимальной. (Очевидно, что решением будет прямая.) Для конкретности положим, что точка A имеет координаты ($x=0$, $y=0$), а точка B—координаты ($x=1$,

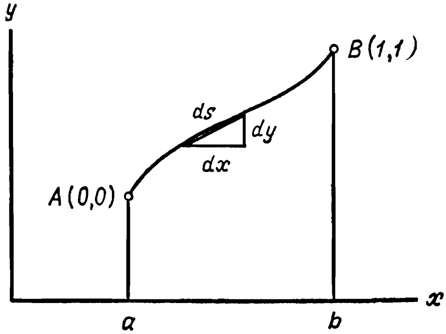


Рис. 12.3.

$y=1$). В этом случае расстояние, которое нужно минимизировать, задается интегралом

$$I=\int_A^B ds=\int_B^A \sqrt{dx^2+dy^2}=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2dx.}$$

Таким образом, функция F имеет вид

$$F=\sqrt{1+(y')^2}.$$

Условием Эйлера является

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{dF}{dy'}=0.$$

В данном случае

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{dy'}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)=0.$$

Таким образом,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=c.$$

Решая это уравнение относительно y', получаем

$$y' = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}},$$

и, следовательно,

$$y = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} x + k.$$

Это уравнение искомой прямой. Постоянные c и k можно вычислить с помощью конечных условий в фиксированных точках A и B. Получаем $k=0$ и $c/\sqrt{1-c^2}=1$. Таким образом, оптимальная функция определяется как $y=x$.

При наличии ограничений получаем несколько иное условие Эйлера. Допустим, что требуется минимизировать интеграл

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

при ограничении

$$J = \int_a^b G(x, y, y')\,dx = k,$$

где k — постоянная. В этом случае для минимизации интеграла

$$\int_a^b [F(x, y, y') - G(x, y, y')]\,dx$$

находится уравнение Эйлера, имеющее вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'} = 0.$$

Коэффициент λ несколько напоминает неизвестный множитель Лагранжа. Две постоянные, получаемые в результате решения уравнения Эйлера, и коэффициент λ определяются из двух граничных условий и с помощью значения k.

В качестве примера допустим, что требуется найти кривую, связывающую точки $A(0, 0)$ и $B(2, 0)$ таким образом, чтобы длина линии была минимальной, а площадь под линией равнялась бы $A=\pi/2$ (рис. 12.4). Таким образом, задача состоит в том, чтобы минимизировать интеграл

$$I = \int_0^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

при условии

$$J = \int_0^2 y\,dx = \pi/2.$$

В данном случае

$$F = \sqrt{1+(y')^2} \quad \text{и} \quad G = y.$$

Условие Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'} = 0$$

дает

$$0 - \lambda - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} + 0 = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = -\lambda,$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = -\lambda x + c_1.$$

Можно показать, что решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \sqrt{2x - x^2},$$

и при данных условиях получаем $\lambda = c_1 = 1$. Возводя в квадрат и преобразуя это выражение для y, получаем знакомое

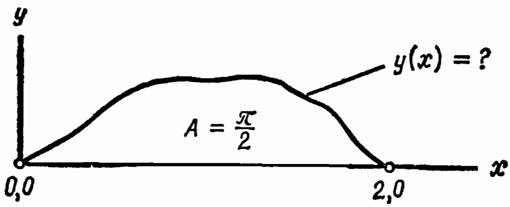


Рис. 12.4.

нам уравнение окружности с единичным радиусом и центром в точке (1, 0)

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Это и есть искомая кривая. Можно показать, что в случае, когда требуется минимизировать отношение интегралов (например, I/J), то для целей вычисления это равносильно минимизации I при наличии ограничения J (разумеется, за исключением случая, когда J — непостоянная). И в этом случае условием Эйлера является

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\lambda\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}+\lambda\frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}=0,$$

где F и G — функции, входящие в интегралы I и J. Допустим, что требуется минимизировать отношение

$$\frac{\int_0^{2\pi}(r^3-R^3)\,r d\theta}{\int_0^{2\pi}(r^2-R^2)\cos\theta d\theta}=\frac{I}{J},$$

где R — постоянная. В данном случае функции F и G имеют вид

$$F=r^3-R^3,$$
$$G=(r^2-R^2)\cos\theta.$$

Условие Эйлера (в котором x и y заменяются на θ и r) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial r}-\lambda\frac{\partial G}{\partial r}-\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial r'}+\lambda\frac{d}{d\theta}\frac{dG}{\partial r'}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^3-R^3)-\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left[(r^2-R^2)\cos\theta\right]-0+0=0,$$

$$3r^2-2\lambda r\cos\theta=0.$$

Отсюда находим r:

$$r=\frac{2}{3}\lambda\cos\theta.$$

Для получения λ нам потребуются граничные условия. Однако соотношение между r и θ для оптимального значения I/J определено.

12.8. Краткие выводы

Это первая глава из серии глав, посвященных теории принятия решений. Если принятие решения сводится к задаче нахождения максимального или минимального значения целевой функции при определенных заданных ограничениях, то в этом случае имеем задачу оптимизации. В данной главе рассмотрены следующие методы оптимизации:

простое дифференцирование, метод множителей Лагранжа, численные методы, линейное программирование и вариационное исчисление.

Как неоднократно указывалось ранее в этой книге, теория вероятностей и математическая статистика весьма актуальны для современного инженера-проектировщика. Исходы различных возможных событий редко известны достоверно. Обычно решения принимаются в условиях неопределенности. Поэтому для принятия правильных решений требуется умение применять законы теории вероятностей. В следующей главе мы обратимся к изучению теории вероятностей.

Задачи

12.1. Проверьте размерность левой и правой частей физических уравнений, записанных в этой главе.

12.2. Используя цифровую вычислительную машину, найдите оптимальное значение функции $y=10x^2+5x-2$. Решите задачу самостоятельно, однако затем постарайтесь составить самую эффективную программу из числа полученных в вашей группе.

12.3. Решите задачи линейного программирования, сформулированные в этой главе, используя формальный способ, называемый симплексным методом. Для изучения этого метода воспользуйтесь одной из книг, указанных в литературе.

12.4. Рассмотрите функцию $y=\sin x-\frac{1}{100}x^2$ в области $0\leqslant x\leqslant 10$. Найдите максимум и минимум. Каким образом можно определить максимум и, кроме того, отличить его от минимума? Какое значение имеет этот пример для решения более сложных задач?

12.5. Рассмотрите целевую функцию $U=(2/x^2z)+3x+z^2$. Найдите оптимальное значение с помощью двух численных методов.

12.6. Требуется изготовить ящик с четырьмя стенками и дном, но без крышки. Объем ящика 1 $м^3$. Стоимость материала составляет 10 долл. за 1 $м^2$. Сборка обходится в 10 долл. за 1 $м^2$. Какого размера ящик нужно изготовить?

12.7. Через реку нужно переправить 400 $м^3$ гравия. Материал должен перевозиться в открытом бункере длиной t_1, шириной t_2 и высотой t_3. Стоимость стенок и дна бункера составляет 10 долл. за 1 $м^2$, а стоимость окантовки его ребер — 20 долл. за 1 $м$. Реализовать бункер после его использования нельзя, а каждый рейс туда и обратно обходится 10 центов. Каковы будут оптимальные затраты? (Используйте метод двойственных переменных.)

ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ

1. Asimow M., Introduction to Engineering Design, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
   В книге имеется интересный раздел, посвященный методам оптимизации.
2. Balakrishnan A. V., Neustadt L. W., Computing Methods in Optimization Problems, Academic Press, New York, 1964.
   Сборник статей по численным методам оптимизации.
3. Johnson R. C., Optimum Design of Mechanical Elements, John Wiley, New York, 1961.
   В этой книге не рассматриваются в явном виде математические методы оптимизации, но она хороша тем, что в ней наглядно показаны сущность и роль оптимизации в процессе проектирования.
4. Sasieni M., Yaspan A., Friedman L., Operations Research, John Wiley, New York, 1959.
   Хорошая книга по методам исследования операций, один из разделов которой посвящен линейному программированию.
5. Zener C., A Mathematical Aid in Optimizing Engineering Design, Proc. Nat. Acad. Sci., 47, p. 537—539, 1961.

ГЛАВА 13

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

13.1. Введение

Большинство людей знакомится с теорией вероятностей в высшей школе или колледже. На вопрос, какова вероятность появления цифры при подбрасывании монеты, обычно отвечают: «Одна вторая». На вопрос, какова вероятность выпадения четырех очков при подбрасывании шестигранной игральной кости, обычно отвечают: «Одна шестая». На вопрос, какова вероятность выпадения нечетного числа очков, отвечают: «Одна вторая». Эти ответы показывают, что существует вероятностная шкала, начинающаяся с нуля (для события, появление которого невозможно) и доходящая до единицы (для события, которое обязательно должно произойти). Числа на этой шкале устанавливаются следующим образом. Пусть задано замкнутое множество N возможных исходов. Вероятность появления события A равна

$$p(A)=\frac{\text{Число случаев появления событий } A}{N}.$$

Теперь несколько расширим это популярное знакомство с теорией вероятностей. Допустим, что монета должна подбрасываться два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет цифра? Ясно, что ответ будет $1/2\times1/2=1/4$. Большинство людей понимает, что вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятностей появления каждого из них в отдельности.

Сказанное здесь не выходит за пределы популярных сведений по теории вероятностей. Для начала этого достаточно, однако в данной главе эти начальные сведения будут расширены, с тем чтобы охватить значительно больший круг вопросов.

13.2. Символические обозначения

Прежде чем приступать к изучению самого предмета теории вероятностей, следует познакомиться с используемой здесь системой обозначений. В этой системе обозначений символы заменяют словесные выражения. Так, можно записать:

A — длина стержня равна $12 \pm 0{,}01$ *см*;
B — диаметр стержня равен $1 \pm 0{,}001$ *см*.

Для обозначения утверждения, противоположного B, используется строчная буква b. Утверждением, противоположным A, является

a — длина стержня *не равна* $12 \pm 0{,}01$ *см*.

Заметим, что утверждением, противоположным a, является A.

При определении символов, используемых в теории вероятностей, важно, чтобы каждый символ заменял только одно утверждение или выражал только одну идею. Таким утверждениям соответствует простое непосредственное отрицание. Было бы неправильно, например, определять символ D как утверждение, выражающее, что D — длина стержня равна $12 \pm 0{,}01$ *см*, а его диаметр равен $1 \pm 0{,}001$ *см*. Вместо этого каждому событию должен соответствовать отдельный символ, а комбинации событий различного характера — комбинация отдельных символов, составленная согласно определенным правилам, принятым для этой системы обозначений.

Если, например, желательно выразить комбинированное утверждение «A и B», то используется просто обозначение AB:

AB — A и B;
AB — длина стержня равна $12 \pm 0{,}01$ *см*, а диаметр стержня равен $1 \pm 0{,}001$ *см*.

Еще одним фундаментальным комбинированным утверждением является «либо A, либо B, либо и A и B», которое обозначается

$A+B$ — либо A, либо B, либо и A и B,

$A+B$ — либо длина стержня равна $12\pm0{,}01$ *см*, либо диаметр стержня равен $1\pm0{,}001$ *см*, либо справедливо и то и другое одновременно.

Из этих определений следует, что

$$AB=BA.$$

13.3. Таблицы истинности

Тождественность комбинированных утверждений можно проверить, используя так называемые таблицы истинности. Простейшей таблицей истинности является таблица, где рассматривается только один символ:

Случай	A
1	И
2	Л

Если рассматриваются три символа, то основная таблица имеет вид

Случай	A	B	C
1	И	И	И
2	И	И	Л
3	И	Л	И
4	И	Л	Л
5	Л	И	И
6	Л	И	Л
7	Л	Л	И
8	Л	Л	Л

Примеры легко продолжить.

Таблицы истинности можно использовать для доказательства тождественности комбинированных выражений. Пусть заданы два выражения, например $A(B+C)$ и $AB+AC$. Если в таблице истинности они имеют один и тот же смысл в любом случае, то ясно, что их невозможно отличить друг от друга при любой проверке, и они тождественны. Рассмотрим выражения $A(B+C)$ и $AB+AC$. Основная таблица истинности расширяется так, чтобы эти выражения было удобно сравнивать. После соответствующего расширения получаем

Случай	A	B	C	$B+C$	$A\ (B+C)$	AB	AC	$AB+AC$
1	И	И	И	И	И	И	И	И
2	И	И	Л	И	И	И	Л	И
3	И	Л	И	И	И	Л	И	И
4	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
5	Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
6	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
7	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
8	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

Заметим, что событие AB истинно лишь в том случае, если истинны события A и B, а событие $A+B$ истинно в том случае, если истинно событие A или событие B (или оба одновременно). Поскольку в составленной выше таблице истинности события $A(B+C)$ и $AB+AC$ тождественны в любом случае, оба эти выражения эквивалентны.

Ниже приведена таблица истинности для комбинированных событий $A+B$ и ab.

Случай	A	B	$A+B$	a	b	ab
1	И	И	И	Л	Л	Л
2	И	Л	И	Л	И	Л
3	Л	И	И	И	Л	Л
4	Л	Л	Л	И	И	И

Поскольку в таблице истинности в любом случае события $A+B$ и ab противоположны, они противоположны и по смыслу. Другими словами, можно сказать, что событие ab противоположно событию $A+B$. Этот результат очень полезен при решении многих вероятностных задач.

13.4. Обозначения, используемые в теории вероятностей

В теории вероятностей приведенные выше обозначения используются наряду с некоторыми другими символами. Вертикальная черта обозначает «при условии, что», а p

обозначает вероятность. Так, если

A — утверждение, что завтра пойдет дождь;

X — утверждение, что по сообщению бюро прогнозов завтра пойдет дождь,

то $p(A|X)$ обозначает: вероятность того, что завтра пойдет дождь *при условии*, что об этом сообщило бюро прогнозов. Вероятность появления совместных событий можно выразить аналогичным образом, например $p(AB|X)$, $p[(A+B)|X]$, $p[(Ab+aB)C|XY]$ и т. д.

Исключительно важно иметь в виду, что вероятность имеет смысл только в связи с данной информацией. Понятие об «истинной» вероятности некоторого происходящего события не имеет смысла. Рассмотрим, например, следующие утверждения:

A_1 — первой картой, вынутой из колоды, состоящей из 52 карт, оказался туз;

A_2 — второй картой, вынутой из колоды, состоящей из 52 карт, оказался туз;

A_n — n-й картой, вынутой из колоды, состоящей из 52 карт, оказался туз;

X — перед вытягиванием очередной карты ранее вынутые карты в колоду не возвращаются.

Ясно, что в первом случае $p(A_1|X)={}^4/_{52}={}^1/_{13}$. Заметим также, что $p(A_2|X)={}^1/_{13}$. Поскольку отсутствует информация о карте, вынутой первой, ничего другого не остается, как пренебречь ею. Действительно, $p(A_{52}|X)={}^1/_{13}$!

Допустим теперь, что из полной колоды вытаскивается карта и не раскрывается. Затем вытаскивается вторая карта и сразу не раскрывается. Вероятность того, что второй картой окажется туз, равна $p(A_2|X)={}^1/_{13}$. Теперь раскроем первую карту и допустим, что это туз. Хотя вторая карта и остается нераскрытой, однако для лица, которое ее не видело, *вероятность* того, что эта карта туз, меняется сразу, как только он видит первую карту. Эта вероятность равна $p(A_2|A_1X)={}^3/_{51}={}^1/_{17}$. Обратите внимание на то, что появление дополнительной информации (от события X переходим к событию A_1X) изменяет вероятность. Вероятность зависит от наличия информации, а не от объективной действительности. (Если для вас это сложно, то, полагая, что в рассматриваемой колоде, состоящей из 52 карт, всего два туза, вычислите вероятность появления события A_2. Пусть теперь вы обнаружили, что в колоде эти два туза идут рядом и т. д. и т. п.) Каждый раз при поступлении новой *информации* о ситуации изменяется и вероятность, хотя реальные условия нисколько не меняются. Наконец, возможно наличие *полной* информации (т. е. вынутая карта раскрывается) — в этом случае вероятность теряет всякий смысл. Таким образом, вероятность характеризует состояние знания или состояние ума, а не какое-то реальное состояние. Это условное *понятие*, введенное человеком, а не результат реального наблюдения.

13.5. Знание «будущих» событий

Возвратимся снова к колоде, состоящей из 52 карт:

X — колода карт является стандартной, и вытянутые карты обратно не возвращаются;

A_n — n-я вытянутая карта оказалась тузом.

Вероятности некоторых событий мы уже рассматривали, например

$$p(A_1 \mid X) = {}^1/_{13},\ p(A_2 \mid X) = {}^1/_{13},\ p(A_2 \mid A_1X) = {}^1/_{17}.$$

Допустим, что нужно вычислить вероятность $p(A_1|A_2X)$, т. е. нам известно, что карта, вынутая второй, является тузом, а первая карта еще не раскрыта. Ответом будет $p(A_1|A_2X) = {}^3/_{51} = {}^1/_{17}$. Когда вычисляются вероятности предыдущих событий, наличие информации о том, что вторая карта туз, исключает эту карту из числа N рассматриваемых. Если вас затрудняет вычисление этой вероятности, попытайтесь вычислить вероятность $p(A_5|A_2A_3A_4X)$! Проверьте также, что $p(A_1|A_3X) = {}^1/_{17}$, $p(a_2|A_1X) = {}^{12}/_{13}$ и $p(a_2|A_1X) = {}^{48}/_{51} = {}^{16}/_{17}$.

13.6. Принцип недостаточного основания

В случае отсутствия соответствующей информации о вероятностях различных исходов все исходы следует считать одинаково возможными. Иногда это условие называется принципом недостаточного основания.

Так, если

X — имеется семь шаров (некоторые из них красные, другие зеленые); вынутые шары обратно в урну не возвращаются;

R_n — шар, вынутый n-м, оказался красным;

G_n — шар, вынутый n-м, оказался зеленым,

$$\text{то } p(G_1 \mid X) = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad p(R_1 \mid X) = \frac{1}{2}.$$

Если используется новая информация, например,

Y — в урне находятся четыре красных и три зеленых шара, то она даст новые вероятности. Так,

$$p(G_1 \mid XY) = \frac{3}{7}.$$

Однако по-прежнему $p(G_1|X) = \frac{1}{2}$.

13.7. Основные законы теории вероятностей

Теперь можно сформулировать две основные аксиомы теории вероятностей. Первая из них очевидна:

$$p(A \mid X) + p(a \mid X) = 1.$$

Вторая аксиома менее очевидна. Она определяет вероятность сложного события

$$p(AB \mid X) = p(A \mid BX)\, p(B \mid X).$$

Кроме того, поскольку $AB=BA$, отсюда следует, что

$$p(AB \mid X) = p(B \mid AX)\, p(A \mid X).$$

С помощью этих двух законов можно вывести два других. Один из них относится к событиям типа $A+B$:

$$p[(A+B) \mid X] = p(A \mid X) + p(B \mid X) - p(AB \mid X).$$

Четвертый закон легко вывести из второго. Поскольку $AB = BA$, можно написать

$$p(A \mid BX)\, p(B \mid X) = p(B \mid AX)\, p(A \mid X).$$

Преобразуя, получаем

$$p(A \mid BX) = p(A \mid X) \frac{p(B \mid AX)}{p(B \mid X)}.$$

Последнее выражение называется теоремой Байеса.

С помощью этих четырех законов можно решать многие задачи теории вероятностей. Некоторые из таких задач приведены в нескольких последующих разделах.

13.8. Применение правил теории вероятностей

Пример 1. Конструкция ракеты такова, что вероятность успешного запуска на Луну составляет 0,20. Какова вероятность хотя бы одного успешного исхода при запуске двух ракет?

Решение: X — информация, содержащаяся в условии задачи.

A_n — успех при n-й попытке.

Дано: $p(A_n|X)=0{,}20$.

Найти: $p[(A_1+A_2)|X]=?$

$$p[(A_1+A_2) \mid X]=p(A_1 \mid X)+p(A_2 \mid X)-p(A_1A_2 \mid X),$$

$$p(A_2A_1 \mid X)=p(A_2 \mid A_1X)\,p(A_1 \mid X).$$

Поскольку события A_1 и A_2 независимы,

$$p(A_2 \mid A_1X)=p(A_2 \mid X).$$

Таким образом, $p(A_2A_1|X)=0{,}20\cdot 0{,}20=0{,}04$.

$$\underline{\underline{p[(A_1+A_2) \mid X]}}=0{,}20+0{,}20-0{,}04=\underline{\underline{0{,}36}}.$$

Заметим, что, поскольку событие a_1a_2 является противоположным событию A_1+A_2, эту задачу можно также решить следующим путем:

$$p[(A_1+A_2)|X]=1-p(a_1a_2|X)=1-p(a_2|a_1X)\,p(a_1|X)=$$
$$=1-p(a_2 \mid X)\,p(a_1 \mid X)=1-0{,}80\cdot 0{,}80=$$
$$=1-0{,}64=\underline{\underline{0{,}36}}.$$

Пример 2. Инженер-разработчик, который должен задать уровень надежности для очень сложной аппаратуры, хочет знать следующее. Допустим, что для готовой продукции уровень надежности установлен равным 70%. Если клиенту направлены с завода три изделия, выбранные случайным образом, то какова вероятность того, что по крайней мере одно из них будет удовлетворять требованиям.

Решение: X — информация, содержащаяся в условии задачи.

A_n — n-е изделие удовлетворяет требованиям.

Дано: $p(A_n \mid X)=0{,}70$.

Найти: $p[(A_1+A_2+A_3) \mid X]$.

$$p[(A_1+A_2+A_3) \mid X] = p(A_1 \mid X) + p(A_2 \mid X) + p(A_3 \mid X) - \\ - p(A_1A_2 \mid X) - p(A_1A_3 \mid X) - p(A_2A_3 \mid X) + \\ + p(A_1A_2A_3 \mid X).$$

Заметим, что эту формулу можно вывести, полагая $B=A_2+A_3$ и используя основное правило для сложного события $p[(A_1+B) \mid X]$. Подставим затем A_2+A_3 вместо B и снова используем это правило. Известно, что $p(A_1 \mid X)=p(A_2 \mid X)=p(A_3 \mid X)=0{,}70$. Чтобы получить $p(A_1A_2 \mid X)$, заметим, что события A_1 и A_2 независимы, поэтому

$$p(A_1A_2 \mid X) = p(A_2 \mid A_1X)\, p(A_1 \mid X) = p(A_2 \mid X)\, p(A_1 \mid X) = \\ = 0{,}70 \cdot 0{,}70 = 0{,}49.$$

Аналогично $p(A_1A_2A_3 \mid X)=0{,}70^3=0{,}343$. Таким образом,

$$p[(A_1+A_2+A_3) \mid X] = \\ = 0{,}70+0{,}70+0{,}70-0{,}49-0{,}49-0{,}49+ \\ +0{,}343 = \underline{\underline{0{,}973.}}$$

Заметим, что имеется более простой метод. Поскольку событие abc противоположно событию $A+B+C$,

$$p[(A_1+A_2+A_3) \mid X] = \\ = 1 - p(a_1a_2a_3 \mid X) = 1 - p(a_1 \mid a_2a_3X)\, p(a_2 \mid a_3X)\, p(a_3 \mid X) = \\ = 1 - p(a_1 \mid X)\, p(a_2 \mid X)\, p(a_3 \mid X) = \\ = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}027 = \underline{\underline{0{,}973.}}$$

Пример 3. Электродвигатели, выпускаемые одной из фирм, часто выходят из строя, и их конструкцию необходимо пересмотреть. Данные о неисправности изделий показывают, что 12% из них имеют плохие щеточные контакты и перекос якоря. Обнаружено также, что 24% изделий имеют плохие щеточные контакты, а 36% — перекос якоря. Найдите вероятность того, что изделие имеет плохие щеточные контакты или перекос якоря либо и то и другое одновременно. Найдите также вероятность того, что изделие не имеет никаких дефектов.

Решение: X — информация, содержащаяся в условии задачи.

A — плохие щеточные контакты.

B — перекос якоря.

Дано: $p(AB \mid X)=0{,}12$; $p(A \mid X)=0{,}24$; $p(B \mid A)=0{,}36$.

Найти: $p[(A+B) \mid X]=?$; $p(ab \mid X)=?$

$$p[(A+B) \mid X]=p(A \mid X)+p(B \mid X)-p(AB \mid X)= \\ =0{,}24+0{,}36-0{,}12=0{,}48.$$

Поскольку событие ab противоположно событию $A+B$, то

$$p(ab \mid X)=0{,}52.$$

Пример 4. Допустим, что конструкторский отдел направил заказчику для проверки шесть образцов нового экспериментального изделия. Оказалось, что два из них, посланных по ошибке, являются образцами первого варианта конструкции и не удовлетворяют требованиям. Какова вероятность того, что по крайней мере одно из первых двух изделий, проверенных заказчиком, не удовлетворит требованиям?

Решение: X — информация, содержащаяся в условии задачи.

A_n — n-е проверенное изделие имеет дефекты.

Дано: $p(A_n \mid X)=\frac{1}{3}$.

Найти: $p[(A_1+A_2) \mid X]=?$

$$p[(A_1+A_2) \mid X]=p(A_1 \mid X)+p(A_2 \mid X)-p(A_1A_2 \mid X),$$
$$p(A_1A_2 \mid X)=p(A_2 \mid A_1X)\,p(A_1 \mid X)={}^1/_5\cdot{}^1/_3={}^1/_{15}.$$

Заметим, что $p(A_1,A_2 \mid X)=p(A_1 \mid A_2X)p(A_2 \mid X)={}^1/_5\cdot{}^1/_3=$ $={}^1/_{15}$.

$$\underline{\underline{p[(A_1+A_2) \mid X]}}={}^1/_3+{}^1/_3-{}^1/_{15}={}^9/_{15}=\underline{\underline{{}^3/_5}}.$$

Пример 5. Инженер, желающий определить причины частых отказов в системе, которую он разработал, обнаружил, что имеются два основных источника ошибок: A и B. На основании имеющихся данных он смог определить, что в 36% случаев происходит либо отказ A, либо отказ B. Он нашел также, что в 12% случаев происходит только отказ A. Каков процент отказов B?

Решение: X — информация, содержащаяся в условии задачи.
A — в системе произошел отказ A.
B — в системе произошел отказ B.
Дано: $p[(A+B)\,|\,X]=0{,}36$; $p(Ab\,|X)=0{,}12$.
Найти: $p(A\,|\,X)=?$; $p(B\,|\,X)=?$

Поскольку событие ab противоположно событию $A+B$, то $p(ab\,|\,X)=0{,}64$.

$$p(ab \mid X)=p(a \mid bX)\,p(b \mid X)=0{,}64,$$
$$p(Ab \mid X)=p(A \mid bX)\,p(b \mid X)=0{,}12=$$
$$=1-p(a \mid bX)=p(b \mid X).$$

Эти два уравнения содержат два неизвестных: $p(b\,|\,X)$ и $p(a\,|\,bX)$.
Решая эту систему уравнений, получаем

$$p(a \mid bX)=\frac{16}{19}, \qquad p(b \mid X)=0{,}76.$$

Таким образом, $p(B\,|X)=0{,}24$.

Пример 6. Жалобы заказчиков свидетельствуют о том, что в конструкции нового прибора ночного видения где-то допущен серьезный просчет. Полученные данные показывают, что 75% приборов имеют либо хороший приемник, либо хороший индикатор, либо и то и другое одновременно. Известно, что 80% приборов с хорошим приемником имеют хороший индикатор. Известно также, что 65% приборов имеют хороший приемник и хороший индикатор. Что бы вы переделали в первую очередь — приемник или индикатор?

Решение: X — информация, содержащаяся в условии задачи.
A — прибор имеет хороший приемник.
B — прибор имеет хороший индикатор.
Дано: $p[(A+B)\,|\,X]=0{,}75$; $p(B\,|\,AX)=0{,}80$; $p(AB\,|X)=0{,}65$.

Найти: $p(A \mid X)=?$; $p(B \mid X)=?$

$$p[(A+B) \mid X]=p(A \mid X)+p(B \mid X)-p(AB \mid X),$$
$$0{,}75=p(A \mid X)+p(B \mid X)-0{,}65,$$
$$1{,}40=p(A \mid X)+p(B \mid X),$$
$$p(AB \mid X)=p(B \mid AX)\,p(A \mid X),$$
$$0{,}65=0{,}80\,p(a \mid X),$$
$$p(A \mid X)=13/16=0{,}81,$$
$$p(B \mid X)=1{,}40-p(A \mid X)=1{,}40-\frac{13}{16}=0{,}59.$$

Таким образом, приборов с плохим приемником 19%, а приборов с плохим индикатором 41%. Лучше всего было бы переделать и то и другое, но вдвое важнее переделать индикатор!

13.9. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение

В начале этой главы указывалось, что вероятность является абстрактным условным понятием. Допустим, что, накапливая данные, мы получили совокупность, состоящую из N исходов, и пусть N_i— число исходов i-го типа. Таким образом, $\sum_i N_i=N$. Допустим далее, что V_i— значение исхода i-го типа. Тогда при этих обозначениях известное нам среднее значение принимает вид

$$V_{\text{ср}}=\frac{1}{N}\sum_i N_i V_i=\overline{V}.$$

В данном случае среднее является некоторой величиной, полученной наблюдением. Допустим теперь, что нам необходимо *предсказать* среднее значение. Прогнозированное среднее называется *математическим ожиданием*. Если p_i— вероятность получения i-го исхода при любом испытании, то математическое ожидание имеет вид

$$V_{\text{м.о}}=\sum_i p_i V_i=\langle V\rangle.$$

Математическое ожидание является абстрактным понятием. Однако, когда N велико, среднее значение и математическое ожидание по существу оказываются численно равными.

Задание среднего значения или математического ожидания важно в вероятностных ситуациях. Однако среднее как группы величин 0,48; 0,49; 0,50; 0,50 и 0,53, так и группы величин 0,20; 0,30; 0,50; 0,60; 0,90 равно 0,50.

Другая величина, называемая дисперсией, используется как характеристика *разброса* или ожидаемого разброса данных. Дисперсия совокупности имеет вид

$$\sigma^2(V) = \frac{1}{N}\sum_i N_i (V_i - \langle V\rangle)^2.$$

Прогнозируемая дисперсия равна

$$\sigma^2(V) = \sum_i p_i (V_i - \langle V\rangle)^2.$$

Чтобы понять смысл дисперсии, заметим, что для первой группы данных, значения которых мало отличаются друг от друга, дисперсия будет равна 0,00028, в то же время для второй группы, характеризуемой значительным разбросом, дисперсия равна 0,060.

Среднее квадратическое отклонение, которое является просто квадратным корнем из дисперсии, употребляется чаще, чем дисперсия, поскольку имеет ту же размерность, что и среднее значение. В нашем примере среднее квадратическое отклонение для группы данных, значения которых близки друг другу, равно 0,017. Это показывает, что бóльшая часть данных заключена в интервале $0{,}50 \pm 0{,}017$. Среднее квадратическое отклонение для группы данных, характеризуемых большим разбросом, составляет 0,244. Важность этих параметров существенно увеличивается, когда объем данных возрастает.

13.10. Оценка вероятностей на основании средних значений и средних квадратических отклонений

Хотя часто бывает необходимо использовать оценку числа исходов N_i или оценку вероятностей p_i для вычисления или прогнозирования средних значений и средних квадратических отклонений, иногда важно уметь решать обратную задачу. Допустим, что известны среднее значение и среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность появления каждого i-го состояния?

Рассмотрим конкретный пример. Пусть нам известно, что завод выпускает станки четырех типов стоимостью по 7000, 9000, 11 000 и 15 000 долл. Кроме того, известно, что средняя стоимость станка составляет 9000 долл. Какая оценка распределения выпускаемых станков по типам является наилучшей?

Очевидно, что задачи такого рода имеют бесконечное множество решений, удовлетворяющих заданному среднему значению. Какое же решение из бесконечного числа возможных является наилучшим?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно обратиться к теории информации. Более полный вывод можно получить, используя литературу, список которой дается в конце главы. Теория информации показывает, что наименее смещенную оценку вероятностей мы получим, максимизируя функцию

$$S = -k \sum_i p_i \ln p_i$$

при заданных ограничениях. В данном случае ограничениями являются $\sum_i p_i = 1$ и $\sum p_i V_i = \overline{V} = 9000$ долл. Функция S называется энтропией и отражает среднюю неопределенность информации о системе.

Чтобы максимизировать функцию S, обычно используются множители Лагранжа. Для нахождения ее оптимального значения продифференцируем функцию S и полученный результат приравняем нулю. Затем продифференцируем уравнение для ограничивающих условий и умножим каждое из них на множитель Лагранжа.

$$dS = -k \sum_i (\ln p_i + 1)\, dp_i = 0,$$

$$\lambda \sum_i dp_i = 0,$$

$$\beta \sum_i V_i\, dp_i = 0.$$

Суммируя эти три выражения и замечая, что $dp_i = 0$, получаем

$$\sum_i (\ln P_i + \lambda + \beta V_i)\, dp_i = 0.$$

Поскольку это условие должно удовлетворяться всегда, вероятности P_i определяются из уравнения

$$\sum_i (\ln P_i + \lambda + \beta V_i) = 0,$$

$$P_i = \exp(-\lambda - \beta V_i).$$

Теперь множители Лагранжа λ и β находятся путем использования двух исходных уравнений для ограничений. Решая эти уравнения, получаем

$$\lambda = \ln \left[\sum_i \exp(-\beta V_i)\right],$$

$$V = \frac{\sum_i V_i \exp(-\beta V_i)}{\sum_i \exp(-\beta V_i)}.$$

Следовательно,

$$p_i = \exp(-\lambda - \beta V_i) = \frac{\exp(-\beta V_i)}{\sum \exp(-\beta V_i)}.$$

Можно также показать, что

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = -\langle V\rangle, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \beta^2} = \sigma^2(V) = -\frac{\partial \langle V\rangle}{\partial \beta}.$$

Для приведенного здесь конкретного примера имеем

$$\bar{V} = \frac{\sum_i V_i \exp(-\beta V_i)}{\sum_i \exp(-\beta V_i)} = \frac{7x^7 + 9x^9 + 11x^{11} + 15x^{15}}{x^7 + x^9 + x^{11} + x^{15}} = 9,$$

где $x = e^{-\beta}$, а значения V берутся в тысячах долларов. После несложных преобразований имеем

$$6x^{15} + 2x^{11} - 2x^7 = 0.$$

Поскольку корень $x=0$ не имеет смысла, разделив это уравнение на x^7, получим

$$6x^8 + 2x^4 - 2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим $y=0{,}433$ или $x=$ $=0{,}809$, если рассматриваются только действительные положительные корни. Затем определяем вероятности P_i

$$P_i = \frac{x^{V_i}}{\sum_i x^{V_i}},$$

$$P_1 = \frac{0,809^7}{0,809^7 + 0,809^9 + 0,809^{11} + 0,809^{15}} = 0,432,$$

$$P_2 = 0,302, \quad P_3 = 0,186, \quad P_4 = 0,085.$$

Таким образом, наилучшей оценкой, которую можно сделать на основании данной информации, является следующая: 43% выпускаемых станков стоят по 7000 долл., 30% — по 9000, 19% — по 11 000 и 8% — по 15 000 долл. в год. Изложенный выше метод вполне применим и при наличии большего числа данных, например, средних квадратических отклонений, хотя в этом случае вычисления становятся более громоздкими. Впрочем, методика остается той же: нахождение наименее смещенной оценки (т. е. энтропии $S = -k\sum_i P_i \ln P$) при заданных ограничениях.

13.11. Краткие выводы

Не все решения могут приниматься при наличии достоверной информации об исходе. Часто мы располагаем лишь частичной информацией о реальных условиях, так что имеет место неопределенность. Вероятность является средством количественного выражения неопределенности и как таковая часто используется в процессе принятия научно обоснованных решений. В этой главе было дано относительно неглубокое введение в теорию вероятностей, выведены ее основные законы и показаны некоторые из ее многочисленных применений. Студенты и инженеры должны уметь распознавать ситуации, когда применим и полезен вероятностный анализ.

Вероятность — абстрактное понятие. Математическая статистика имеет дело с конкретными данными. Математическая статистика занимается анализом данных, а теория вероятностей является одним из разделов математики. Однако теория вероятностей и математическая статистика — родственные дисциплины, поскольку математическая статистика использует вероятностные модели. Вероятности не обязательно должны быть, как в этой главе, дискретными. Часто имеет место непрерывное распределение вероятностей. Именно непрерывные распределения вероятностей используются при статистическом анализе.

В следующей главе рассматриваются как теория вероятностей, так и математическая статистика. Задача состоит в получении правильного ответа на вопросы следующего характера. Пусть, например, проверялась выборка объемом 100 деталей, взятая из общего количества 10 000 деталей. Оказалось, что средний срок службы составляет 100 *час*, а среднее квадратическое отклонение равно 10 *час*. С какой степенью достоверности можно считать, что для 90% всех деталей срок службы составляет не менее 95 *час*? В значительной мере от статистического анализа и прогнозирования зависят такие тесно связанные с инженерным проектированием области, как контроль качества, надежность и т. д. Кроме того, все большее распространение получает нахождение статистических допусков (задание среднего значения и среднего квадратического отклонения) вместо обычных предельных допусков (задание максимума и минимума).

Задачи

13.1. Z — в урне находятся 15 шаров: шесть красных (R, r), пять зеленых (G, g) и четыре синих. X — вынутые шары возвращаются обратно. Y — вынутые шары обратно не возвращаются. Вычислите следующие вероятности:

1) $p(R_1 \mid Z)$,
2) $p(R_4 \mid ZX)$,
3) $p(R_4 \mid ZY)$,
4) $p(R_2 \mid R_1ZX)$,
5) $p(R_2 \mid R_1ZY)$,
6) $p(r_2 \mid R_1ZY)$,
7) $p(R_1R_2 \mid ZX)$,
8) $p(R_1R_2 \mid ZY)$,
9) $p(r_1r_2 \mid ZY)$,
10) $p[(R_1+R_2) \mid XZ]$,
11) $p[(R_1+R_2) \mid XY]$,

12) $p(R_1 \mid R_2XY)$,
13) $p(R_2 \mid r_1XY)$,
14) $p(R_2 \mid g_1XY)$.

13.2. Иногда вместо языка, введенного в данной главе, используется другой символический язык (преимущественно в теории множеств). Вот обозначения этого языка:

$\overline{A}$ — отрицание A;
$A \cup B$ — A или B, или и то и другое;
$A \cap B$ — A и B.

Запишите на этом языке следующие выражения:

$$A(B+C)=$$
$$A+a=$$
$$Bb=$$
$$(A+b)=$$
$$aB(A+B+E)=$$

13.3. Запишите все выражения этой главы, используя обозначения теории множеств, введенные в задаче 13.2.

13.4. Вероятность поражения цели ракетой равна 0,6. Сколько таких ракет нужно направить на цель, чтобы вероятность ее поражения поднялась до 0,95?

13.5. 40% точных приборов, поставляемых фирмой, возвращаются заказчиками вследствие низкого качества. Чтобы прекратить поставку изделий с дефектами, был введен контроль качества; для проверки разработанной методики контроля испытаниям были подвергнуты все поставляемые изделия и полученные результаты зафиксированы. 65% проверенных приборов были признаны годными. Из этой партии заказчики, как обычно, возвратили 40% приборов. Из числа принятых заказчиками приборов во время проверки были признаны годными 85%. Оцените методику проверки путем вычисления вероятности того, что прибор, признанный годным при проверке, будет принят заказчиком.

13.6. Известно, что если на некоторой производственной операции давление превышает 10 *ата* и в то же время температура превышает 100° C, то продукт перестает удовлетворять техническим условиям. В течение месяца были получены следующие данные: 1) в 40% производственных циклов давление превышало 10 *ата*; 2) в 30% производственных циклов, когда давление не превышало 10 *ата*, температура превышала 100° С, или давление было меньше 10 *ата*, или имело место и то и другое. Какой процент продукции, не соответствующий техническим условиям, можно ожидать? Каков процент производственных циклов, когда температура превышает 100° С?

ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ

1. Dixon J. R., A Programmed Introduction to Probability, Wiley, New York, 1964.
Учебник для самостоятельного изучения, написанный автором этой книги, в котором вопросы теории вероятностей, изложенные в данной главе, рассматриваются глубже и шире. Приводится решение большого числа задач[1].
2. Feller W., Introduction to Probability Theory and Its Applications, Wiley, New York, 1950.
Выдающаяся книга по теории вероятностей. Имеется русский перевод: Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 2-е изд., М., «Мир», т. 1, 1964; т 2, 1967.
3. Tribus M., Thermostatics and Thermodynamics, D. Van Nostrand, Princeton, N. J., 1961.
Хотя это книга по термодинамике, в ней содержится хорошее введение в теорию вероятностей и теории информации для инженеров.

---

[1] См. также Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, изд. 6, М., «Наука», 1964; Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, изд. 4, М., «Наука», 1965; Вентцель Е. С., Теория вероятностей, изд. 3, М., «Наука», 1964; Румшицкий Л. З., Элементы теории вероятностей, изд. 3, М., «Наука», 1966; Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, М., «Наука», 1967; Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, изд. 2, М., «Наука», 1965; Борель Э., Вероятность и достоверность, М., Физматгиз, 1961; Лоэв М., Теория вероятностей, М., ИЛ, 1962.— *Прим. перев.*

ГЛАВА 14

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

14.1. Введение

Обычно на практике фактические распределения вероятностей аппроксимируются моделями теории вероятностей, а затем на основании анализа модели делаются выводы. По этой причине данная глава начинается с изложения некоторых обычных распределений: биномиального, мультиномиального и так называемого нормального. После вывода выражений, описывающих эти распределения, остальная часть главы будет посвящена решению статистических задач, которые могут встретиться при инженерном проектировании.

14.2. Биномиальное и мультиномиальное распределения

Допустим, что при каждом испытании возможны только два исхода: a или b. Исходами могут быть, например, цифра и герб, успех и неудача. Пусть n — общее число испытаний; n_a— число исходов типа a; n_b— число исходов типа b, а p_a и p_b— вероятности исходов соответственно a и b при каком-либо одном испытании. Ясно, что при этих условиях

$$n_a+n_b=n \quad \text{и} \quad p_a+p_b=1.$$

Можно показать, что вероятность появления при n испытаниях n_a исходов a и n_b исходов b равна

$$p\,(n_a,\ n_b \mid n_x)=\frac{n\,!}{n_a\,!\,n_b\,!}\,(p_a)^{n_a}\,(p_b)^{n_b}\,.$$

Иногда это равенство, называемое биномиальным распределением, записывается в несколько ином виде. Допустим, что исход a можно рассматривать как успех, а исход b — как неудачу. Обозначим число успешных исходов через r вместо n_a. Пусть также p — вероятность успеха при каком-либо испытании. Тогда формула для биномиального распределения примет вид

$$p(r \mid nx) = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r}.$$

В качестве примера использования этих уравнений рассмотрим следующую задачу. Монета подбрасывается шесть раз. Какова вероятность того, что цифра выпадет четыре раза? В данном случае $n=6$, $n_a=4$, $n_b=2$, $p_a=p_b={}^1/_2$. Таким образом,

$$p(n_a=4,\ n_b=2 \mid 6x) = \frac{6!}{4!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}.$$

Рассмотрим другой пример. Допустим, что в урне имеются пять шаров, причем три из них красные и два синие. Вынутый шар возвращается в урну. Какова вероятность того, что при четырех попытках будут вынуты один красный и три синих шара? В данном случае $n=4$, $n_a=1$, $n_b=3$, $p_a={}^3/_5$ и $p_b={}^2/_5$. Следовательно,

$$p(n_a=1,\ n_b=3 \mid 4x) = \frac{4!}{3!\cdot 1!} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{96}{625}.$$

Используя формулу для биномиального распределения, можно ответить на вопрос другого рода: какова вероятность *не менее x* успешных исходов? Например, какова вероятность вытащить хотя бы один красный шар при четырех попытках? Ответом является сумма вероятностей того, что будут вынуты один, два, три и четыре красных шара. Можно показать, что вероятность вынуть один красный шар равна ${}^{96}/_{625}$. Остальные вероятности равны

$$p(n_a=2,\ n_b=2 \mid 4x) = \frac{4!}{2!\ 2!} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{216}{625},$$
$$p(n_a=3,\ n_b=1 \mid 4x) = \frac{4!}{1!\cdot 3!} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{216}{625},$$
$$p(n_a=4,\ n_b=0 \mid 4x) = \frac{4!}{4!\cdot 0!} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{81}{625}.$$

(Заметим, что принято считать $0!=1$.) Таким образом, вероятность вынуть хотя бы один красный шар равна $(96+ +216+216+81)/625=609/625$. Кроме того, можно вычислить вероятность того, что ни одна попытка не окажется успешной. В данном случае эта вероятность равна

$$p(n_a=0,\ n_b=4 \mid 4x)=\frac{4!}{0!\cdot 4!}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}.$$

Тогда вероятность вынуть один или большее число красных шаров (т. е. не менее одного) находится как 1—16/625= =609/625.

Распределение называется *биномиальным*, поскольку оно применяется в тех случаях, когда имеются только *два* исхода (например, цифра и герб). Если число исходов больше двух, то вероятности исходов вычисляются по формуле для так называемого *мультиномиального* распределения. В данном случае возможны исходы a, b, c, ..., k и

$$n_a+n_b+n_c+\ldots+n_k=n,$$
$$p_a+p_b+p_c+\ldots+p_k=1,$$

как и ранее. Выражение для вероятности появления определенной комбинации исходов (n_a исходов типа a; n_b исходов типа b и т. д.) имеет вид

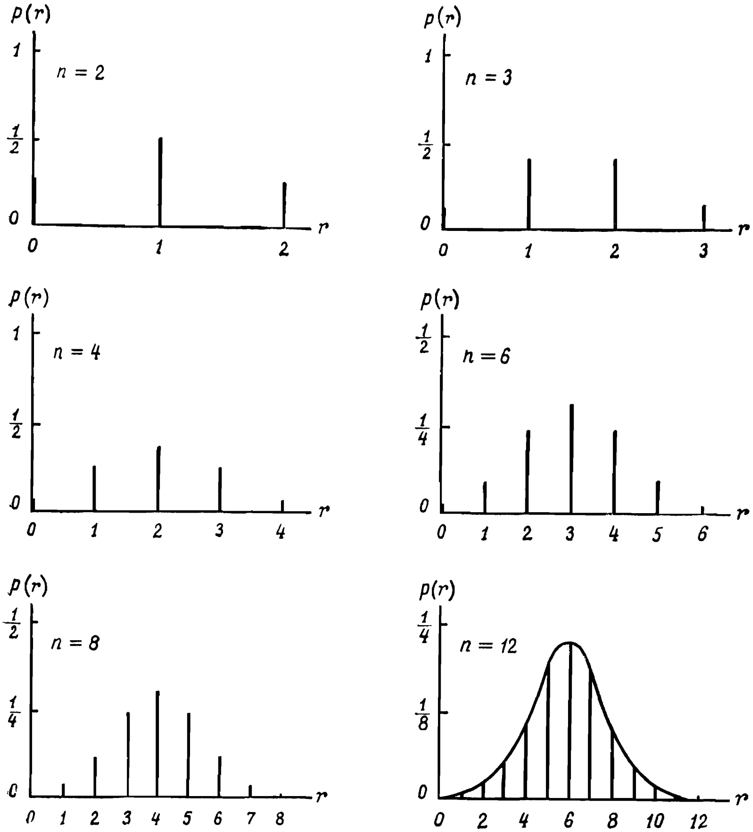
$$p(n_a,\ n_b,\ n_c,\ldots,n_k \mid nx)=\frac{n!}{n_a!\,n_b!\,n_c,\ldots,n_k!}\times$$
$$\times(p_a)^{n_a}(p_b)^{n_b}(p_c)^{n_c},\ldots,(p_k)^{n_k}.$$

В качестве примера рассмотрим колесо рулетки, половина которого окрашена в красный цвет, одна треть — белая и одна шестая часть — синяя.

Какова вероятность того, что при шести запусках рулетки она будет останавливаться так, что против стрелки два раза окажется красный сектор, два раза белый и два раза синий? Здесь $n=6$, $n_{кр}=2$, $n_б=2$, $n_с=2$; $p_{кр}=1/2$, $p_б=1/3$, $p_с=1/6$. Таким образом,

$$p(n_{кр}=2,\ n_б=2,\ n_с=2 \mid 6x)=$$
$$=\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{72}.$$

Возвращаясь снова к биномиальному распределению, полезно взглянуть на графики, где вероятность появления r успешных исходов построена как функция числа успешных исходов. Число успешных исходов показано на рис. 14.1 для случая $p=1/2$. Заметим, что высота вертикальной линии



Р и с. 14.1. Вероятности r успешных исходов при n испытаниях, когда вероятность успешного исхода при данном испытании равна $^1/_2$.

пропорциональна вероятности успеха в этой точке. Таким образом, вероятность появления трех успешных исходов при четырех испытаниях равна $^1/_4$. Кроме того, суммируя вероятности, можно найти вероятность получения некоторого числа успешных исходов, лежащих в определенном интервале значений. Так, вероятность получения двух или трех успешных исходов при четырех попытках равна $^1/_4+^3/_8=^5/_8$. В книгах по математической статистике часто приводятся таблицы для различных значений p и для значений n до 20—25. При более высоких значениях n используется нормальное распределение.

14.3. Кривая нормального распределения

Как показано на рис. 14.1, при увеличении числа опытов n биномиальное распределение становится похожим на гладкую непрерывную функцию. Действительно, можно пока-

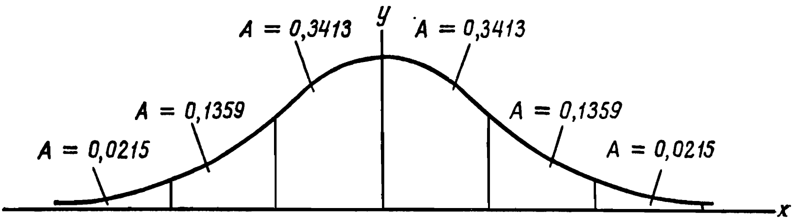


Рис. 14.2. Кривая нормального распределения.

зать, что при $n \to \infty$ получаемая кривая задается уравнением

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-x^2}{2}.$$

Эта кривая показана на рис. 14.2. Общая площадь под кривой равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1.$$

Таким образом, отдельные участки под кривой соответствуют определенным вероятностям. Случайная величина x, заданная этой кривой, называется *нормально распределенной случайной величиной*. Вероятность того, что случайная величина x окажется, например, в интервале от $x=0$ до $x=1$, равна

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx = 0{,}34.$$

Другие площади, т. е. вероятности, показаны на рис. 14.2. Можно показать, что среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины x равно 1. Среднее значение μ этого распределения равно нулю (площадь под кривой справа от точки $x=0$ равна площади слева от точки $x=0$). По аналогии с дискретным случаем, когда дисперсия равна

$$\sigma^2(v) = \sum_i p_i\,(v_i - \bar{v})^2,$$

имеем

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^2 \exp \frac{-x^2}{2} = 1.$$

Таким образом, $\sigma(x)=1$. Из рис. 14.2 видно, что в случае нормального распределения случайной величины x 68% всех исходов приходится на область, простирающуюся вправо и влево от среднего значения на величину среднего квадратического отклонения; 96% — на область, простирающуюся вправо и влево от среднего значения на величину двух средних квадратических отклонений и т. д. В книгах по математической статистике приводятся таблицы, в которых указаны площади, лежащие под различными частями этой кривой.

Если рассматривается кривая распределения, построенная на основании фактических данных, то эти данные, разумеется, не нормированы, т. е. среднее не равно нулю, а среднее квадратическое отклонение не равно единице. Однако это распределение легко пронормировать. Пусть, например, собраны данные о высоте колосьев пшеницы и средняя высота оказалась равной 70 *см* со средним квадратическим отклонением 2 *см*. Если допускается, что эти данные можно аппроксимировать кривой нормального распределения, то их можно привести к нормальному виду, введя новую переменную

$$Z = \frac{x - 70}{2},$$

где x — высота колоса в сантиметрах. В общем виде новая случайная величина Z, приводящая к нормированной кривой нормального распределения, имеет вид

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

где μ — среднее значение ненормированной кривой распределения случайной величины x, а σ — ее среднее квадратическое отклонение. Заметим, что колосья высотой от 68 до 72 *см* (т. е. в интервале среднее значение $\pm\sigma$) составляют 68% общего числа. При $x=68$ получаем $Z=-1$, а при $x=72$ $Z=1$; это показывает, что кривая действительно пронормирована, что и требовалось сделать.

Выше допускалось, что распределение высоты колосьев относительно среднего значения является случайным. Разумеется, это является аппроксимацией. Принятая кривая распределения фактически представляет собой *вероятностную модель* реальных статистических данных. Однако во многих случаях эта модель оказывается вполне удовлетворительной. Если рассматривается выборка, которую можно считать случайной, и отсутствуют эффекты, которые могут привести к искажению исходных данных или отбрасыванию их части, то можно ожидать, что распределение будет близким к нормальному, и применение соответствующей вероятностной модели даст ценные результаты.

Рассмотрим пример использования изложенного выше материала. Допустим, что игроки ведущей команды бросают бейсбольный мяч из дальней части поля в среднем на расстояние 75 *м* при среднем квадратическом отклонении 7,5 *м*. Таким образом,

$$\bar{x}=75, \quad \sigma=7{,}5.$$

Если теперь предположить, что эти данные можно аппроксимировать нормированной кривой, то

$$\mu=75, \quad \sigma=7{,}5.$$

Теперь легко получить любую информацию о распределении. Например, процент бросков на расстояние, превышающее 90 *м* (т. е. среднее значение плюс два средних квадратических отклонения), составляет 2,28%. Хотя, взглянув на кривую, можно убедиться, что такое расстояние превышает среднее значение на два средних квадратических отклонения, этот результат можно получить и формально путем перехода к *нормированной* нормально распределенной случайной величине

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{90-75}{7{,}5}=2.$$

Теперь из таблиц можно найти, что на долю значений, превышающих два средних квадратических отклонения, приходится 2,28% площади под кривой (рис. 14.2).

Наконец, предположим, что автоматический станок, на котором изготавливаются тысячи деталей, выпускает небольшие валики со средним диаметром 2,521 *мм* при среднем квадратическом отклонении 0,136 *мм*. У какого процента деталей можно ожидать диаметр менее 2,450 *мм*?

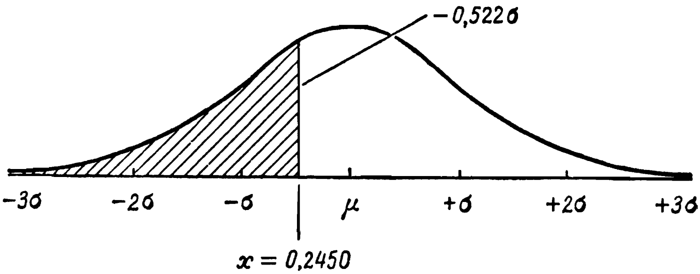


Рис. 14.3.

Допуская, что фактическое распределение соответствует нормальному, можно быстро дать ответ и в этом случае. Переходя к нормированному распределению, получаем

$$Z = \frac{2,450 - 2,521}{0,136} = \frac{-0,071}{0,136} = -0,522.$$

Этот случай показан на рис. 14.3. С помощью таблиц можно найти, что незаштрихованная область составляет 0,7008, т. е. 30% деталей будут иметь диаметр валика менее 2,45 *мм*.

14.4. Выборка

В ходе предыдущего обсуждения предполагалось, что указанные средние значения и средние квадратические отклонения вычислены на основе анализа всей совокупности. Обычно это слишком расточительно, а иногда и невозможно, поскольку при некоторых проверках деталь может разрушаться. Допустим теперь, что из большой совокупности случайным образом берется выборка объемом n и определяется среднее значение и среднее квадратическое отклонение выборки (называемые выборочным средним и выборочным средним квадратическим отклонением). Затем задача сводится к определению характеристик этих данных (проблема выбора) и определению соответствия этих данных исходной совокупности (*задача оценки*).

Разумеется, можно также взять несколько случайных выборок объемом n и определить выборочное среднее для каждой из этих выборок. Теперь этот набор выборочных средних сам имеет некоторое распределение. Это означает, что в данном случае имеет смысл рассматривать *распределение выборочных средних*. Основная теорема, доказательство которой здесь не приводится, гласит: *Если совокупность имеет среднее* μ *и среднее квадратическое отклонение* σ, *то выборочное среднее* $\bar{x}$, *основанное на случайной выборке объемом* n, *будет иметь распределение, близкое к нормальному, с тем же самым средним* μ *и средним квадратическим отклонением* $\sigma_{\bar{x}}$, *равным* $\sigma/\sqrt{n}$. Заметим, что совокупность *не обязательно* должна иметь нормальное распределение, а распределение выборочных средних все же будет близким к нормальному. При увеличении n точность приближения возрастет.

На практике нет необходимости брать большое число выборок. Достаточно лишь знать, что *если* взять большое число выборок, то выборочные средние будут иметь нормальное распределение со средним, равным среднему совокупности, и средним квадратическим отклонением, равным среднему квадратическому отклонению совокупности, деленному на квадратный корень из объема выборки ($\sigma/\sqrt{n}$). Для оценки информации о совокупности, в частности для оценки среднего значения и среднего квадратического отклонения совокупности, можно использовать одну выборку.

Каким образом это делается, проще всего показать на примере. Допустим, что изготовитель электрических ламп считает, что срок службы ламп распределен по нормальному закону, и из опыта известно, что, хотя средний срок службы меняется, среднее квадратическое отклонение остается практически постоянной величиной и составляет 96 *час*. Из большой совокупности была взята выборка объемом 36 ламп и найдено, что средний срок службы для этих ламп составляет 1000 *час*. Что можно сказать о среднем сроке службы ламп всей этой совокупности?

Ясно, что изготовитель должен заключить, что средний срок службы ламп этой совокупности также составляет 1000 *час*. Однако этому заключению свойственна некоторая недостоверность. Если бы изготовитель взял большое число выборок, каждую объемом 36 ламп, то выборочные средние были бы распределены относительно среднего совокупности со средним квадратическим отклонением $\sigma/\sqrt{n}=96/6=16$. Среднее квадратическое отклонение выборочных средних равно 16. Таким образом, с вероятностью 68,26% найденное выборочное среднее не отличается от фактического среднего по совокупности более чем на ± 16 *час*. Впрочем, для выборочного среднего можно установить любой требуемый уровень точности. Например, с вероятностью 95,44% данное выборочное среднее не должно отличаться от среднего совокупности более чем на ± 32 *час*. Для вычисления других значений можно использовать таблицы.

К этой задаче можно подойти и с другой стороны. Можно вычислить требуемый объем выборки, необходимый для получения определенной точности. Допустим, что инженеру, решающему эту задачу, необходима 90%-ная достоверность, что выборочный средний срок службы не отличается от среднего срока службы для всей совокупности более чем на ± 10 *час*. Таблицы показывают, что 90% площади под кривой нормального распределения заключено в интервале $\pm 1{,}65\sigma$. Таким образом, $1{,}65\,\sigma$ соответствуют 10 *час*, или

$$1{,}65\sigma = 10.$$

Поскольку $\sigma_{\bar{x}}=\sigma/\sqrt{n}$, находим

$$1{,}65 \cdot \frac{96}{\sqrt{n}} = 10, \qquad n = 251.$$

Чтобы получить требуемую степень достоверности, необходима выборка, содержащая 251 изделие. (Если же подсчитать затраты, то инженер, по-видимому, решит, что можно обойтись и меньшей достоверностью. Заметьте, что за уменьшение неопределенности, т. е. за информацию, нужно платить.)

В задачах оценки при использовании выборки из совокупности принято говорить о доверительных пределах. Этот термин имеет следующий смысл. Если с 95%-ной достоверностью известно, что значение некоторой характеристики совокупности заключено в пределах между x_1 и x_2, то интервал от x_1 до x_2 называется 95%-ным доверительным интервалом. Допустим, что в предыдущем примере требуется найти 95%-ный доверительный интервал для среднего совокупности на основании исходной выборки объемом 36 изделий. Напомним, что выборочное среднее равно 1000 *час*, а среднее квадратическое отклонение выборочных средних составляет ± 16 *час*. Поскольку 95% площади под кривой нормального распределения заключено в интервале $\pm 2\sigma$ (фактически 95,44%), ясно, что при выборочном среднем, равном 1000, с вероятностью 95% среднее совокупности заключено между значениями (1000—32) и (1000+32), т. е. между 968 и 1032. Это и есть 95%-ный доверительный интервал.

Все предыдущее изложение основывалось на том, что среднее квадратическое отклонение для совокупности считалось известным. Если же оно неизвестно, то необходимо брать большее число выборок, пока не будет установлено распределение выборочных средних. Тогда среднее квадратическое отклонение для совокупности будет равно $\sigma_{\bar{x}}\sqrt{n}$.

Изложенное выше применимо непосредственно лишь в том случае, когда берутся большие выборки (n больше 25) и когда объем выборки мал по сравнению с общим объемом совокупности. Для изучения методов обработки малых выборок и малых совокупностей читатель должен обратиться к книгам по математической статистике.

14.5. Быстрая приближенная оценка медианы

Существует простой метод оценки медианы (которая не обязательно должна совпадать со средним) совокупности при использовании малых выборок. Допустим, что из большой совокупности взяты пять выборок. Какова вероятность того, что ни одна из пяти выборок не окажется ниже медианы? Ответом будет $(^1/_2)^5 = 1/32$. Какова вероятность того, что ни одна из выборок не окажется выше медианы? И в этом случае ответом является 1/32. Далее, какова вероятность того, что по крайней мере одна выборка окажется выше медианы и одна выборка ниже?

Ответ равен $1 - ^2/_{32} = ^{15}/_{16}$. Это означает, что если из совокупности берется выборка объемом пять единиц, то с вероятностью, равной 15/16, медиана совокупности заключена между предельными значениями выборки; 15/16 составляет около 94%. Таким образом, эта проверка весьма проста и позволяет быстро найти 95%-ный доверительный интервал. Если, например, проверяются пять валиков из большой партии и оказывается, что они имеют следующие диаметры: 0,512; 0,508; 0,507; 0,503 и 0,499 *см*, то можно сказать, что с вероятностью ошибки, равной только 5% (фактически $6^2/_3$%!), медиана партии находится между 0,499 и 0,512 *см*.

14.6. Проверка гипотез

Каким образом на основании статистической информации строятся выводы? Допустим, например, что две фирмы поставляют валики для некоторого точного прибора. На основании прошлого опыта известно, что валики, поступающие от поставщика A, имеют средний диаметр 0,502 *см* при среднем квадратическом отклонении 0,015 *см*, в то время как валики, поступающие от поставщика B, имеют средний диаметр 0,490 *см* при среднем квадратическом отклонении, также равном 0,015 *см*. Такая вариация в размере диаметра обычно приемлема, поэтому используются валики от двух поставщиков. Однако на этапе проверки возникла проблема выявления изогнутых валиков. Был отбракован ряд изогнутых валиков. Конструкторский отдел не желал пересматривать конструкцию прибора с тем, чтобы учесть возможность изгиба валика, поэтому было важно установить, какая именно фирма поставляет изогнутые валики. Процент изогнутых валиков мал, поэтому было нецелесообразно проверять все поступающие валики. Кроме того, допуски на детали таковы, что для обнаружения изогнутых валиков до сборки потребовалась бы специальная дорогостоящая аппаратура.

В прошлом от поставщика B обычно поступала более надежная продукция, чем от поставщика A. Известно также, что у поставщика B более эффективный отдел контроля качества продукции.

Предположим, что имеются две возможные гипотезы:

H_A — в совокупности, к которой относятся изогнутые валики, средний диаметр равен 0,502 *см*.

H_B — в совокупности, к которой относятся изогнутые валики, средний диаметр равен 0,490 *см*.

При этом возможны также две ошибки:

1) принимается гипотеза H_A, а верна гипотеза H_B;

2) принимается гипотеза H_B, а верна гипотеза H_A.

Если бы теперь имелось несколько выборок изогнутых валиков ($n=9$) и *если бы* они поступили от поставщика A, то распределение выборочных средних для диаметра было бы таким, как показывает кривая H_A на рис. 14.4. Заметим,

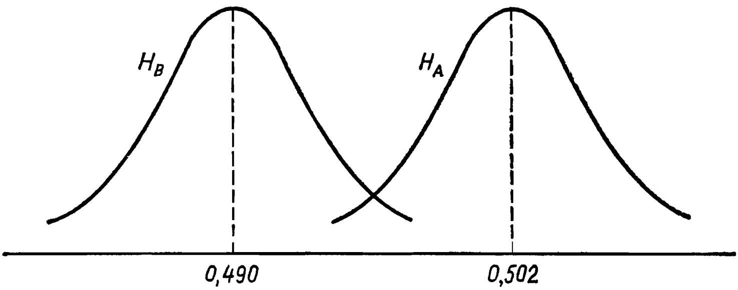


Рис. 14.4.

что среднее квадратическое отклонение выборочных средних равно $\sigma/\sqrt{n}=0{,}005$. Кривая H_B на рис. 14.4 является распределением выборочных средних из совокупности B.

Теперь задача состоит в том, чтобы решить, каким образом принимать решение, т. е. нам необходима стратегия (план принятия решения). Допустим, что измерены диаметры девяти изогнутых валиков и вычислено их среднее значение. Допустим, что средний диаметр равен 0,485 *см*, или 0,494, или 0,498, или 0,504 *см*. Какой вывод нужно сделать?

Следует подчеркнуть, что нет теоретически объективного способа выбрать стратегию. Стратегии, т. е. планы принятия решений, в большинстве случаев субъективны и выбираются на основании того, что они кажутся имеющими смысл или вследствие того, что удовлетворяют принятым правилам. Впрочем, иногда это даже дело личного вкуса! Например, люди, склонные к риску, принимают не те гипотезы, что люди, более осторожные.

Если бы в настоящей задаче не содержалось другой информации, кроме самих распределений, то было бы наиболее целесообразно в качестве критерия использовать диаметр 0,496 *см*. Если выборочное среднее окажется выше 0,496 *см*, то следует принять гипотезу H_A. Можно вычислить возможные ошибки. Значение 0,496 удалено от обоих средних на 1,2σ. Площадь под кривой нормального распределения от 1,2σ до ∞ равна 0,1151. Таким образом, вероятность того, что будет принята гипотеза H_B, когда справедлива гипотеза H_A (ошибка 2-го рода), составляет 11,51%. Какова вероятность появления ошибки 1-го рода?

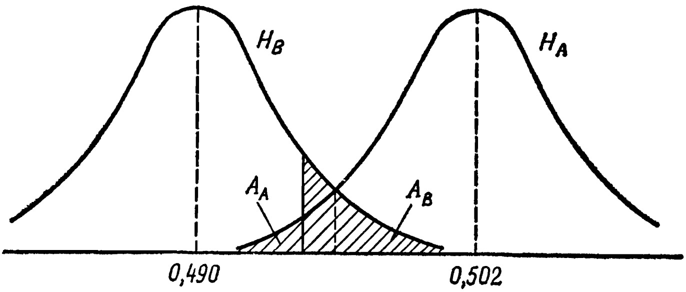


Рис. 14.5.

В данном случае мы располагаем большей информацией, и она носит такой характер, что инженер скорее склонен отвергнуть гипотезу H_A. По этой причине он, возможно, пожелает сдвинуть точку, используемую в качестве критерия влево. (Посмотрите на рис. 14.5.) Что происходит, если инженер поступает таким образом? При перемещении точки изменяется площадь, соответствующая вероятностям возможных ошибок. В точке 0,496 вероятности возможных ошибок были равны 0,1151. По мере перемещения точки решения влево площадь A_B под кривой H_B, расположенная вправо от точки решения до бесконечности, возрастает, а площадь A_A уменьшается. Инженер должен мысленно регулировать положение точки, служащей критерием, до тех пор, пока его не будут удовлетворять получаемые площади или возможные ошибки.

Если, например, выбирается точка решения 0,495, то площадь A_B составит 15,87%, а площадь A_A— 8,08%. В этой точке вероятность ошибки 1-го рода равна 15,87%, а

13 Дж. Диксон

вероятность ошибки 2-го рода — только 8,08%. Если же точка решения перемещается к 0,494, то получаем, что вероятность ошибки 1-го рода равна 21,19%, а вероятность ошибки 2-го рода 5,48%.

Какую точку следует выбрать в качестве критерия? Научного метода выбора этой стратегии не существует. Однако, когда стратегия выбрана, путем анализа можно установить вероятность того, что сделанные на ее основе прогнозы будут неправильными.

Допустим, что для инженера наиболее удобно принять в качестве точки решения цифру 0,494, и пусть путем измерения выборки он нашел, что среднее равно 0,495. Его вывод состоит в том, что изогнутые валики поступают от поставщика A. Это означает, что он принимает гипотезу H_A, и ему известно, что, основываясь лишь на измерении диаметра, он может с вероятностью 21,19% считать, что верна гипотеза H_B. Если же выборочное среднее окажется равным 0,493, то он примет гипотезу H_B, зная, что в этом случае с вероятностью 5,48% верна гипотеза H_A.

Выше для целей иллюстрации предполагалось, что должны сравниваться две гипотезы: одна из них должна приниматься за истинную, а другая — за ложную. Часто возникает такая ситуация, когда одна из гипотез является так называемой нулевой гипотезой. Нулевая гипотеза всегда гласит, что ничего существенного не происходит и ничто не меняется. В качестве примера допустим, что средняя нормальная длина деталей, изготовляемых автоматической линией, составляет 1,000 *см*, а среднее квадратическое отклонение равно 0,010 *см*. Допустим, что в выборке из 25 деталей средняя длина оказалась равной 1,006 *см*. Нулевая гипотеза гласит, что эта выборка взята из нормальной партии продукции. В данном случае вероятность того, что нулевая гипотеза неверна, может быть определена следующим образом. Распределение выборочных средних для выборки объемом $n=25$, взятых из нормальной продукции, показывает, что среднее значение составляет 1,000 *см*, а среднее квадратическое отклонение равно $\sigma=0{,}010/\sqrt{25}=0{,}002$ *см*. Таким образом, выборочное среднее, равное 1,006 *см*, при $n=25$ отстоит от среднего совокупности на три средних квадратических отклонения. Вероятность того, что это может иметь место, равна 0,003, или 0,3%. В данном случае нулевую гипотезу можно отвергнуть с большой степенью уверенности. Этот станок определенно следует проверить.

Обычно на практике нулевая гипотеза отвергается, когда вероятность ошибки меньше 5 или 1%, однако выбор этих значений производится чисто произвольно. Часто используется так называемый 5%-ный (или 1%-ный) доверительный уровень. Это просто означает, что можно быть на 95% (или 99%) уверенным в том, что данный вывод правилен. Задание этих уровней необходимо для того, чтобы результат являлся «статистически значимым». Таким образом, при проверке нулевую гипотезу можно отвергнуть, если результаты показывают, что вероятность того, что она верна, составляет менее 5% (или 1%).

14.7. Корреляция

Огромная ценность теории вероятностей и математической статистики заключается в том, что они позволяют выразить количественно неопределенность или субъективные

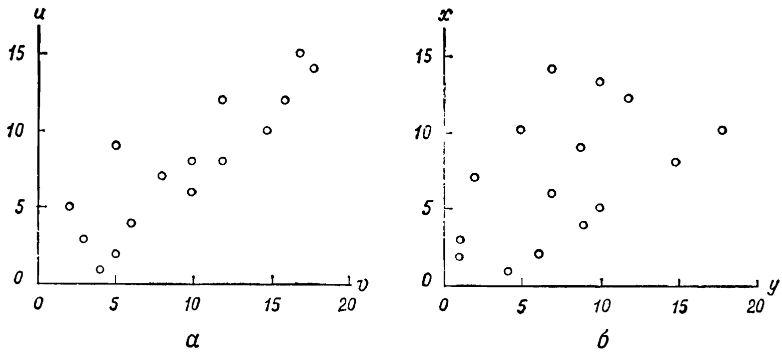


Рис. 14.6.

ощущения. Исследуем, например, два графика, изображенных на рис. 14.6. (Данные для этих графиков приведены в табл. 14.1.) На глаз кажется, что величины u и v связаны между собой в большей степени, чем величины x и y. Часто полезно иметь количественный показатель так называемой «корреляции». Для этой цели в математической статистике выведен параметр, называемый *коэффициентом корреляции*. Коэффициент корреляции r выбирается таким образом, чтобы в случае, когда зависимость между двумя рассматриваемыми переменными выражается прямой линией, значение r было равно 1. Когда эти величины совершенно случайны, коэффициент корреляции равен 0. Значения, заключенные между 0 и 1, выражают количественно связь между переменными величинами или степенью корреляции между

Таблица 14.1

u	v	x	y
1	4	1	4
5	2	2	1
7	8	2	6
2	5	4	9
9	5	3	1
8	10	5	10
8	12	7	2
10	15	8	15
12	12	10	18
12	16	10	5
15	17	12	12
4	6	14	7
3	3	9	9
6	10	13	10
14	18	6	7
116	143	106	116
$\bar{u}=7{,}73$	$\bar{v}=9{,}53$	$\bar{x}=7{,}07$	$\bar{y}=7{,}73$

ними. Чтобы получить коэффициент корреляции между двумя случайными величинами, необходимо для каждой из них вычислить среднее значение и среднее квадратическое отклонение. Для случайных величин u и v, приведенных в табл. 14.1, обозначим средние значения и средние квадратические отклонения соответственно через $\bar{u}$, $\bar{v}$, σ_u и σ_v. Отдельные значения переменных обозначим через u_i и v_i.

Напомним, что

$$\bar{u}=\frac{1}{n}\sum_{i}^{n} u_i, \quad \sigma_u=\left[\sum \frac{1}{n-1}(u_i-\bar{u})^2\right]^{1/2},$$

где n — объем выборки. В данном случае коэффициент корреляции равен

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{(n-1)\sigma_u\sigma_v}.$$

Подставляя сюда численные значения u и v, получаем $r=0{,}84$, что указывает на наличие сильной корреляции, а это и ожидалось. В отличие от данного случая между x и y существует более слабая корреляция, что и следовало ожидать (см. задачу 14.4).

Количественное выражение корреляции очень важно при изучении результатов испытаний, информации о надежности, данных о выпуске продукции и т. д. Однако инженеры должны подходить к этому вопросу с осторожностью и улавливать различие между корреляцией и понятием причины и следствия. Если между двумя случайными величинами существует корреляция, то это еще не означает, что они связаны друг с другом как причина и следствие. Например, заболеваемость раком легких как-то связана с курением, однако оно влияет на наше общество и в некоторых других отношениях. Прежде чем исследователи смогли прийти к выводу, что курение может вызывать рак легких, потребовалось выполнить значительный объем как статистических, так и медицинских исследований.

14.8. Линейная регрессия

Термин «регрессия» используется в математической статистике для обозначения процесса нахождения наилучшей единственной кривой, которую можно провести через совокупность точек. *Линейная* регрессия означает процесс нахождения *прямой*, наилучшим образом соответствующей этим точкам. Так, если коэффициент корреляции r достаточно велик, то для нахождения линии, наилучшим образом соответствующей этим данным, можно применять методы линейной регрессии. Предпочтительность однолинейного представления объясняется тем, что уравнение прямой можно использовать затем как эмпирическое соотношение в аналитической работе.

Существует ряд методов определения «наилучшей» прямой, соответствующей заданным точкам. Как и в случае выбора стратегии, нет какого-либо способа, позволяющего

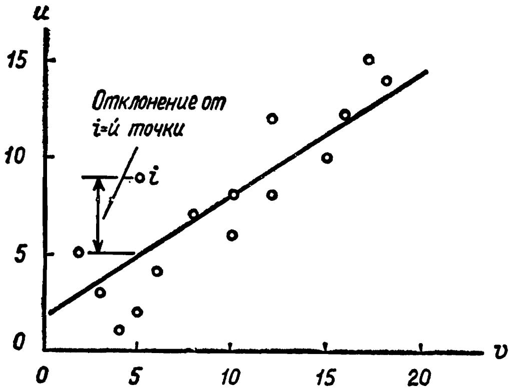


Рис. 14.7.

объективно решить, какой метод *действительно* является наилучшим. Наиболее общим методом, дающим вполне удовлетворительные результаты, является метод наименьших квадратов. Существо этого метода состоит в следующем. Выбирается прямая, дающая наименьшее, или минимальное, значение суммы квадратов отклонений заданных точек от прямой. Допустим, например, что через эти точки проведена прямая, как показано на рис. 14.7. (Это те же точки, что и изображенные на рис. 14.6.) Данную прямую можно представить уравнением вида

$$u = av + b.$$

Оказывается, однако, что более удобно записать это уравнение в виде

$$u = a(v - \bar{v}) + b,$$

где $\bar{v}$ — среднее значение случайной величины v. Для заданной точки, например для i-й (рис. 14.7), отклонение от прямой равно

$$u_i-[a(v_i-\bar{v})+b].$$

Метод наименьших квадратов основан на отыскании прямой, для которой сумма квадратов всех отклонений минимальна.

Можно показать, что уравнения, удовлетворяющие этому требованию, имеют вид

$$b=\bar{u},$$

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})\,v_i}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}.$$

Для данных, изображенных на рис. 14.7, эти формулы дают следующие результаты:

$$b=7{,}73,\qquad a=0{,}626.$$

Эта прямая изображена на рисунке.

14.9. Распределение хи-квадрат

Биномиальное распределение может применяться только в случае двух исходов. Однако во многих ситуациях имеет место более двух исходов. Например, при контроле качества продукция может приниматься с различной оценкой (отлично, хорошо, удовлетворительно, а не только годна или не годна). Существует теоретическое распределение, аналогичное биномиальному, называемое распределением хи-квадрат, которое описывает эту ситуацию. Точно так же, как дискретное биномиальное распределение в пределе становится непрерывным нормальным распределением, так и распределению хи-квадрат в пределе соответствует непрерывный аналог.

Для знакомства с распределением хи-квадрат рассмотрим следующий пример. Оценки, полученные студентами по курсу «инженерное проектирование» за последние 15 лет, после усреднения результатов распределяются следующим образом: $A=10\%$, $B=30\%$, $C=40\%$, $D=10\%$, $F=10\%$. Обычная численность группы составляет 50 человек, поэтому в любой год, если он не отклоняется от средних показателей, оценки по группе распределяются следующим образом: $A=5$, $B=15$, $C=20$, $D=5$, $F=5$. Допустим теперь, что для чтения лекций по этому курсу с нового учебного года назначен новый преподаватель, у которого оценки для очередной группы распределяются так: $A=2$, $B=7$, $C=18$, $D=15$ и $F=8$. Необходимо определить, обусловлено ли это новое распределение вполне возможным колебанием способностей у студентов, избирающих данную специальность, либо новый преподаватель неправильно выставлял оценки или плохо учил. (Заметим, что подобную задачу можно составить, рассматривая качество деталей, изготовленных на станке, как случайную величину. В этом случае задача состоит в определении того, вышла ли продукция из-под контроля или же просто эта выборка была необычной.)

В данном примере рассматриваются пять возможных категорий или исходов. Если обозначить исходы индексом i, то он будет изменяться от 1 до k, где $k=5$. Ожидаемыми исходами e_i являются 5, 15, 20, 5 и 5, а фактическими исходами a_i являются 2, 7, 18, 15 и 8. Показатель соответствия ожидаемых и фактических исходов находится путем вычисления χ^2 следующим образом:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(a_i-e_i)^2}{e_i}.$$

В данном случае

$$\chi^2=\frac{(2-5)^2}{5}+\frac{(7-15)^2}{15}+\frac{(18-20)^2}{20}+\frac{(15-5)^2}{5}+\frac{(8-5)^2}{5}=28{,}1.$$

Заметим, что при полном соответствии χ^2 равняется нулю и что чем больше несоответствие, тем больше значение χ^2.

Опираясь на теоретические соображения, выходящие за рамки данного материала, можно показать, что если из совокупности, для которой заданы ожидаемые исходы, берется большое число выборок объемом $n=50$ и для каждой выборки вычисляется хи-квадрат, то мы получаем распределение, изображенное на рис. 14.8. Изучение этого рисунка показывает, что в примере об оценках студентов нужно принять нулевую гипотезу, т. е. состав группы (по способностям) может *легко* изменяться в той же степени, как это показывают фактические оценки, поскольку вероятность того, что

χ^2 равно 67,5 или превышает это значение, составляет 5%. Если бы значение χ^2 было больше 67,5, то на основании оценок, выставленных новым преподавателем, можно было бы заключить, что вероятность того, что состав групп действительно изменился, менее 5%.

Таблицы распределения хи-квадрат используются почти так же широко, как и таблицы нормального распределения.

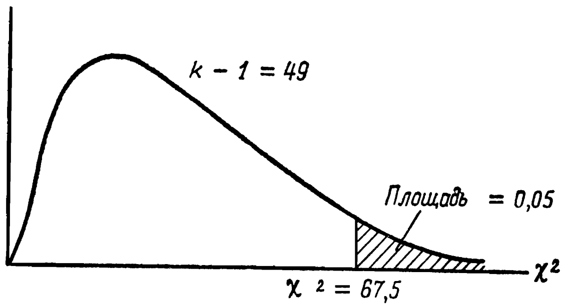


Рис. 14.8. Кривая распределения хи-квадрат.

Кривая распределения хи-квадрат является функцией числа возможных исходов. Это означает, что для каждого значения k существует различное распределение. (Часто параметром, используемым в таблице, является k—1.)

14.10. Пуассоновское распределение

Биномиальное распределение, рассмотренное в разд. 14.2, применимо для случаев, когда размер выборки n и вероятность p появления рассматриваемого события — любые заданные значения. Если значение n велико, то применимо нормальное распределение, рассмотренное в разд. 14.3, поскольку для больших n вычисления по биномиальной формуле становятся громоздкими. Если же n велико, а p мало, то можно вывести другое приближение к биномиальному распределению. Оно называется пуассоновским распределением и используется в теории надежности и в некоторых областях исследования операций.

Вывод выражения для пуассоновского распределения здесь не приводится (см. литературу). Переходя в выражении для биномиального распределения к пределу при $n \to \infty$ и $p \to 0$, получаем

$$p(x_i) = \sum_i \frac{m^{x_i}}{x_i!} e^{-m},$$

где m — среднее или ожидаемое число событий. Допустим, например, что среднее число отказов за час работы при проверке надежности системы равно 3. В этом случае можно использовать пуассоновское распределение для предсказания вероятности появления x_i ($x_i = 0, 1, 2, \ldots$) отказов за час. Вероятность безотказной работы равна $(3^0/0!) \cdot e^{-3} = 0{,}050$. Вероятность появления одного отказа равна $(3^1/1!) \cdot e^{-3} = 0{,}150$ и т. д. Вот сводка результатов (при $m=3$):

x_i	$p(x_i)$
0	$\frac{3^0}{0!} e^{-3} = 0{,}050$
1	$\frac{3^1}{1!} e^{-3} = 0{,}150$
2	$\frac{3^2}{2!} e^{-3} = 0{,}225$
3	$\frac{3^3}{3!} e^{-3} = 0{,}225$
4	$\frac{3^4}{4!} e^{-3} = 0{,}169$
. . . . .	. . . . . .
	$\overline{1{,}000}$

Мы еще вернемся к пуассоновскому распределению в следующей главе, где рассматривается теория надежности.

14.11. Краткие выводы

Данная глава совместно с гл. 13 представляет собой введение в теорию вероятностей и математическую статистику. Как теория вероятностей, так и математическая статистика являются мощным инструментом, которым пользуются, когда необходимо принимать научно обоснованные решения.

Эти главы ни в коей мере не смогут заменить полного курса теории вероятностей и математической статистики (см. литературу).

В следующей главе рассматривается теория надежности. Теория надежности является непосредственным приложением теории вероятностей и математической статистики к инженерному проектированию, и ее роль постепенно возрастает как при разработке космического, так и наземного оборудования.

Задачи

14.1. а. Какова вероятность того, что при подбрасывании монеты четыре раза цифра выпадет три раза? Вычислите вероятность двумя способами — используя биномиальную теорему и путем общих рассуждений.

б. Какова вероятность выпадения цифры не менее трех раз при четырех подбрасываниях монеты?

14.2. Известно, что в партии, все детали которой перемешаны случайным образом, содержится 20% деталей типа A, 30% деталей типа B и 50% деталей типа C. Сколько деталей вам нужно выбрать, чтобы с 95%-ной гарантией была вынута деталь A?

14.3. Какова вероятность того, что в предыдущей задаче в выборке из трех деталей окажется по одной детали каждого типа?

14.4. Известно, что совокупность валиков имеет средний диаметр 0,750 *см* при среднем квадратическом отклонении 0,050 *см*. Каков процент валиков, имеющих диаметр

а) более 0,800 *см*,

б) менее 0,650 *см*,

в) менее 0,600 *см*,

г) менее 0,620 *см*? (Чтобы дать ответ в последнем случае, вам может потребоваться заглянуть в какой-либо другой источник.)

14.5. Для совокупности валиков, рассмотренной в задаче 14.4, найдите 95%-ный доверительный интервал.

14.6. Для совокупности, рассмотренной в задаче 14.4, вычертите график распределения выборочных средних, который можно ожидать, если используется объем выборки $n=16$.

14.7. Из неизвестной совокупности берется выборка из 10 валиков. Найдено, что их средний диаметр составляет 1,920 *см* и среднее квадратическое отклонение равно 0,020 *см*. Какой вывод можно сделать относительно совокупности и с какой достоверностью?

14.8. При 140 подбрасываниях шестигранной игральной кости были получены следующие результаты: одно очко выпало 10 раз, два очка — 15 раз, три очка — 20 раз, четыре очка — 25 раз, пять очков — 30 раз, а шесть очков — 40 раз. Как, по-вашему, можно ли эту игральную кость считать нормальной? Подтвердите ваш вывод количественно.

14.9. Иногда говорят, что экспериментальные данные, полученные при научных исследованиях, должны быть настолько полными, чтобы не потребовался статистический анализ с использованием корреляции и регрессии. Прокомментируйте это утверждение. Кроме того, видите ли вы какое-то различие между необходимостью статистического анализа при научном исследовании и необходимостью статистического анализа на производстве и при инженерном проектировании?

ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ

1. Brownlee K. A., Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering, Wiley, New York, 1960.
2. Fraser D. A. S., Statistics: An Introduction, Wiley, New York, 1958.
3. Gotkin L. G., Goldstein L. S., Descriptive Statistics, Wiley, New York, 1964.
Двухтомный программированный учебник по математической статистике. Хорошее пособие для самостоятельного изучения предмета.
4. Hoel P. H., Elementary Statistics, Wiley, New York, 1960.
Очень хорошее введение в классическую статистику. Не требует больших знаний в области математики.

ГЛАВА 15

ТЕОРИЯ НАДЕЖНОСТИ

15.1. Введение

Космонавт Уолтер Ширра субъективно оценил важность надежности, сказав, что «у тебя невольно возникает чувство беспокойства, когда твоя жизнь зависит от правильности функционирования тысяч деталей, каждая из которых поставлена фирмой, предложившей изготовить ее за самую низкую цену». По мере того как сложность технических систем возрастает, все более важное значение приобретает надежность их работы. Необходимость обеспечения конструкционной надежности пилотируемых космических аппаратов очевидна, однако надежность не менее важна и при массовом производстве изделий гражданского назначения. Надежность является важным качеством всех технических систем, подсистем и компонентов.

Техника надежности стала рассматриваться как самостоятельная область в начале 50-х годов. Успех этого направления обусловлен частично тем, что оно позволило превратить понятие «надежная работа» в количественный параметр. Были предложены различные определения надежности. Следующее определение является общепринятым: надежность — это вероятность того, что некоторый прибор будет выполнять свои функции в течение заданного времени при заданных рабочих условиях. Обратите внимание на то, что надежность есть вероятностное понятие. Важно также отметить, что требуемые рабочие характеристики, рабочие условия и время работы должны быть четко и объективно определены. В противном случае надежность нельзя будет охарактеризовать количественно.

Качество и надежность следует отличать друг от друга. В нетехническом смысле надежность является одним из аспектов качества. С точки зрения инженерного проектирования качество определяется как показатель, характеризующий, в какой мере некоторый прибор удовлетворяет различным стандартам. Кроме надежности, к стандартам качества могут относиться геометрические допуски, производительность или пропускная способность, прочность и т. д. Однако было бы чрезмерным упрощением говорить, что надежность является лишь показателем качества, поскольку все остальные показатели качества также влияют на надежность. Таким образом, хотя качество и надежность тесно связаны друг с другом, они остаются самостоятельными характеристиками, каждая со своей собственной мерой.

Техника надежности многогранна. При проектировании систем теория надежности играет большую роль. Еще одной областью является измерение надежности. Довольно много писалось об административном управлении и организации процесса проектирования высоконадежных систем. Прогнозирование надежности математическими методами также является важной областью техники надежности. Наконец, многие специалисты в области теории надежности занимаются задачами согласования надежности с другими факторами, например затратами или уровнями запасов. В одной главе невозможно полностью охватить все эти стороны. Теории надежности посвящено немало книг (см. литературу). Однако в этой главе мы сможем довольно полно познакомиться с предметом и рассмотреть его основные принципы и методы. Читатели, заинтересованные в более детальном знакомстве с этим предметом, должны вначале изучить теорию вероятностей и математическую статистику, а затем прочитать одну из рекомендованных книг по данному вопросу. В некоторых высших технических учебных заведениях читаются довольно обширные курсы лекций по теории надежности.

15.2. Пример из теории надежности

Для иллюстрации основных положений теории надежности приводится следующий пример. Допустим, что в результате проверки 400 деталей получены данные, приведенные в табл. 15.1. Имея эти данные, можно вычислить несколько важных показателей надежности следующим образом.

Ясно, что надежность R есть функция времени, в течение которого должна работать деталь. Если время работы

Таблица 15.1

Временной интервал t, *час*	Число отказов за данный интервал f	Полное число отказов с начала проверки	Число деталей S, оставшихся исправными
0		0	400
1	100	100	300
2	46	146	254
3	23	169	231
4	20	189	211
5	18	207	193
6	17	224	176
7	15	239	161
8	14	254	146
9	13	267	133
10	12	279	121
11	11	290	110
12	10	300	100
13	9	309	91
14	7	316	84
15	12	328	72
16	16	344	56
17	20	364	36
18	18	382	18
19	10	392	8
20	6	398	2
21	2	400	0

составляет 1 *час*, то надежность равна 300/400=0,75. Если же требуется найти надежности по результатам работы в течение 6 *час*, то получаем следующую величину: 176/400= =0,44. График для надежности как функции времени показан на рис. 15.1.

Еще одним полезным показателем, который часто используется при расчете надежности, является интенсивность отказов F. Интенсивность отказов определяется как число отказов за единицу времени, выраженное в процентах от совокупности всех рассматриваемых приборов.

Поскольку в рассматриваемом примере приводятся данные, отнесенные к целому числу часов, может использоваться приращение времени, равное 1 *час*. Однако для более общего случая интенсивность отказов определяется как

$$F = \frac{1}{N} \lim_{t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{1}{N} \frac{df}{dt},$$

где f — число отказов. Интенсивность отказов для данных, приведенных в табл. 15.1, изображена на рис. 15.2. При

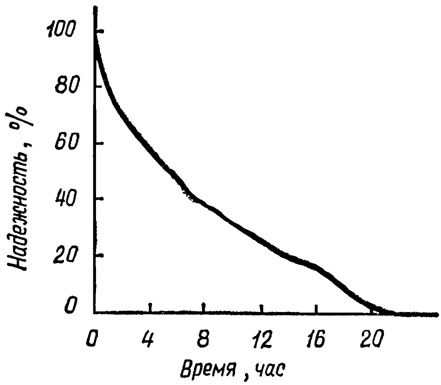


Рис. 15.1.

получении данных для рис. 15.2 вместо N использовалась средняя совокупность для каждого временно́го интервала. Так, в интервале от 0 до 1 *час* было 100 отказов и средняя совокупность равна $(400+300)/2=350$. Следовательно, интенсивность отказов для этого периода равна $100/350=0{,}286$.

Кривая интенсивности отказов, изображенная на этом рисунке, является типичной. Здесь показаны три различные области. Отказы, происходящие в период приработки (иногда называемые «детской смертностью»), обусловлены не только наличием неизбежных внезапных отказов, но и производственными просчетами, плохим качеством материала и т. д. Тщательное изготовление, контроль качества и выбор соответствующего периода приработки позволяют устранить эти дефекты в продукции, направляемой на рынок. Отказы в дальней области обусловлены износом и указывают на то, что прибор уже еле дышит. Между ними находится период нормальной эксплуатации системы, и обычно в этом периоде наблюдается постоянная интенсивность отказов.

Еще одним показателем, который часто вычисляется и используется в работах по теории надежности, является *наработка на отказ* (среднее время между отказами). Обозначим этот параметр через M; он определяется просто как

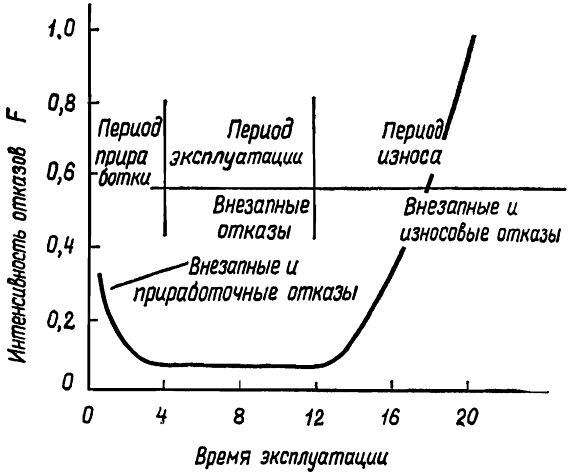


Рис. 15.2.

величина, обратная интенсивности отказов:

$$M = \frac{1}{F}.$$

Для рассматриваемого примера за рабочий период среднее время между отказами приближенно равно $M = 1/0{,}09 = 11$ *час.*

15.3. Экспоненциальная функция надежности

В разд. 14.9 было рассмотрено пуассоновское распределение. Это теоретическое распределение имеет непосредственное отношение к анализу надежности. Напомним, что пуассоновское распределение описывается следующим выражением:

$$1=e^{-a}+ae^{-a}+\frac{a^2e^{-a}}{2!}+\frac{a^3e^{-a}}{3!}+\ldots+\frac{a^ne^{-a}}{n!},$$

где e^{-a} — вероятность отсутствия событий в заданном интервале; ae^{-a} — вероятность появления одного события в заданном интервале; $\frac{a^2e^{-a}}{2}$ — вероятность появления двух событий в заданном интервале и т. д.; a — среднее число событий за интервал.

Теоретическое распределение этого типа применяется к расчету надежности следующим образом. Рассматриваемым событием является отказ. Если F — интенсивность отказов и рассматривается промежуток времени t, то среднее число отказов за промежуток времени t равно $f=Ft$. Теперь вероятности появления 0, 1, 2, ..., n отказов в промежутке времени t задаются отдельными членами распределения. Если в примере, описанном в предыдущем разделе, используется $t=1$ *час* и принимается интенсивность отказов 0,09, то вероятность отсутствия отказов за 1 *час* работы будет равна $e^{-1\cdot 0{,}09}=0{,}914$. Вероятность появления одного отказа равна $0{,}09e^{-1\cdot 0{,}09}=0{,}082$ и т. д. Отметим, что момент $t=0$ должен соответствовать началу промежутка времени, для которого вычисляется интенсивность отказов F. В противном случае не учитывается то обстоятельство, что вследствие отказов размер партии уменьшается. Интенсивность отказов F зависит от начального размера партии.

Использование этого распределения приводит к так называемому экспоненциальному закону отказов. В этом примере вероятность отсутствия отказов в течение первого часа ($t=1$) эквивалентна надежности для одночасового срока службы. Численно она равна $R_1=e^{-0{,}09}=0{,}914$. Двухчасовой надежной работе отвечает вероятность отсутствия отказов при $t=2$ *час*, или $R_2=e^{-0{,}18}$. Таким образом, в общем случае надежность можно записать как

$$R_t=e^{-Ft}.$$

Это выражение является экспоненциальным законом отказов, или экспоненциальным законом надежности. Заметим, что этот закон основан на постоянной интенсивности отказов F. Для примера на рис. 15.3 приведены теоретическая экспоненциальная кривая надежности, соответствующая интенсивности отказов $F=0{,}09$, и фактическая кривая, построенная на основании этих же данных. Отклонение обусловлено включением в фактические данные приработочных и износовых отказов. Если бы эти отказы были должным

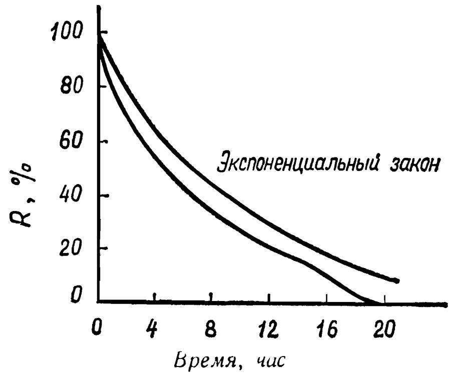


Рис. 15.3.

образом исключены из результатов испытаний и замен, то экспоненциальная кривая вполне бы соответствовала этим данным.

15.4. Распределение Вейбулла

Еще одной теоретической кривой надежности, имеющей широкое применение, является распределение Вейбулла. Используемое в теории надежности распределение Вейбулла имеет вид

$$f(t) = 1 - \exp(-t^m/M),$$

где m является коэффициентом формы, а M — время наработки на отказ. Показатели M и m определяются экспериментальным путем на основе использования фактических данных. При применении этого теоретического распределения функция $f(t)$ интерпретируется как вероятность отказа в момент времени t. Таким образом, надежность в момент времени t равна $1-f(t)$

$$R_t = \exp(-t^m/M).$$

Когда накоплены данные, достаточные для того, чтобы определить m и M для рассматриваемого продукта или изделия, это уравнение можно использовать для прогнозирования надежности.

Следует заметить, что при $m=1$ функция надежности Вейбулла совпадает с экспоненциальной функцией. Таким

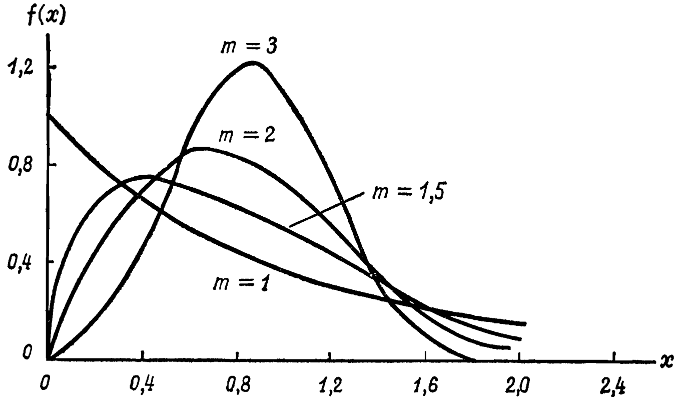


Рис. 15.4. Распределение Вейбулла.

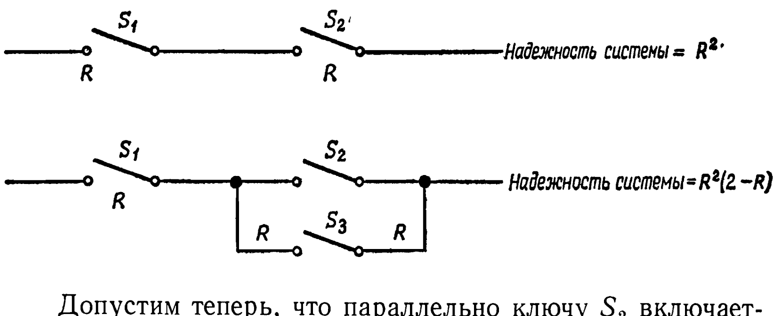
образом, функция Вейбулла является более общей, и экспоненциальный закон получается из нее как частный случай. При увеличении m до 3 и более кривая распределения Вейбулла становится кривой нормального распределения. На рис. 15.4 изображены кривые распределения Вейбулла для заданного значения M и различных значений m.

15.5. Интенсивность совместных отказов и избыточность

Что происходит с надежностью, когда работа системы зависит от успешной работы двух деталей, имеющих надежность, равную соответственно R_1 и R_2? Ясно, что надежность такой комбинированной системы равна произведению R_1R_2. Если же число работающих деталей составляет сотни и тысячи, то несмотря на то, что каждая из них имеет высокую надежность, надежность системы в целом может оказаться очень низкой. Например, система из 20 компонентов, каждый с надежностью 0,99, имеет надежность лишь $0{,}99^{20}=0{,}82$.

При умножении надежностей с целью получения надежности системы необходимо соблюдать некоторую осторожность. Часто система продолжает функционировать удовлетворительно, хотя и не идеально, даже в том случае, когда у одного или большего числа ее компонентов рабочие характеристики оказываются ниже заданного уровня. Поэтому в некоторых случаях надежность системы может быть больше надежности, предсказываемой просто путем умножения надежности отдельных элементов. Какие-либо общие методы рассмотрения этих общих случаев отсутствуют, и каждый из них должен изучаться в отдельности.

Специалисты в области теории надежности разработали схему повышения надежности сложных систем, они используют такой термин, как *избыточность*. Идею избыточности легко проиллюстрировать на примере электрических цепей. Допустим, что система состоит из двух ключей. Замыкание цепи можно осуществить лишь тогда, когда оба ключа функционируют нормально. Если надежность каждого ключа при выполнении операции замыкания цепи равна R, то надежность системы, состоящей из двух ключей, равна R^2.



Допустим теперь, что параллельно ключу S_2 включается еще один ключ S_3 с надежностью R, замыкающий цепь, когда замыкает цепь и ключ S_2. Теперь система будет функционировать нормально, если функционируют нормально ключи S_2 или S_3 или оба вместе. Надежность комбинации ключей S_2 и S_3 (напомним, что надежность есть вероятность) равна

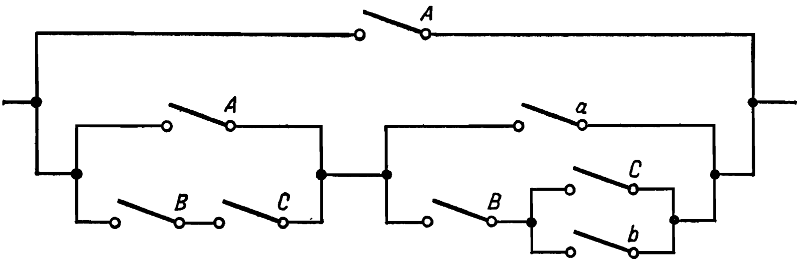
$$R(S_2+S_3)=R(S_2)+R(S_3)-R(S_2)R(S_3)=2R-R^2$$

Таким образом, надежность всей системы равна

$$R[S_1(S_2+S_3)]=R(2R-R^2)=R^2(2-R).$$

Поскольку всегда $R<1$, можно видеть, что при добавлении третьего ключа надежность системы повышается. Дополнительный ключ является избыточным в том смысле, что он *не является необходимым* для работы системы.

Как показал приведенный пример, при разработке систем и анализе их надежности весьма удобно применять логические символические обозначения. В качестве более сложного примера рассмотрим цепь, показанную ниже:



Эта цепь окажется замкнутой и будет проводить ток в том случае, когда истинно следующее выражение:

$$A+(A+BC)\{a+[B(C+b)]\}.$$

Это функция вида $A+f(A, B, C)$. Легко показать, что логическую функцию вида $f(X_1, X_2, \ldots)$ можно разложить и записать как

$$f(X_1, X_2, \ldots)=X_1 f(I, X_2, X_3, \ldots)+X_1 f(\varphi, X_2, X_3, \ldots),$$

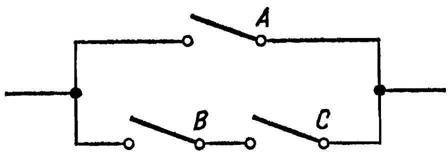
где I и φ называются соответственно универсальным множеством и нулевым множеством. Для случая цепи I обозначает «всегда замкнуто», а φ — «всегда разомкнуто». Вместо X_1 в функции $f(I, X_2, \ldots)$ стоит I, а в функции $f(\varphi, X_2, \ldots)$ — величина φ. Применяя это разложение к записанной выше функции, получаем

$$(A+BC)[a+B(C+b)]=$$
$$=A(I+BC)[\varphi+B(C+B)]+a(\varphi+BC)[I+B(C+b)]=$$
$$=A(I+BC)[B(C+b)]+a(BC)[I+B(C+b)]=$$
$$=AB(C+b)+ABCB(C+b)+aBC+aBCB(C+b)=$$
$$=ABC+ABC+aBC+aBC=$$
$$=ABC+aBC=$$
$$=(A+a)BC=$$
$$=BC.$$

Прибавляя к полученному результату A, получаем выражение для эквивалентной цепи

$$A+BC.$$

Схематически эквивалентная цепь выглядит следующим образом:



Внимательно изучив исходную цепь, читатель может убедиться в том, что этот результат справедлив, однако в более сложных случаях данный метод позволяет получить значительное упрощение. Изображенная выше цепь логически эквивалентна данной, однако она значительно надежнее, поскольку она проще. Разложение функции $f(X_1, X_2, \ldots)$ заимствовано из булевой алгебры. При анализе систем с целью устранения излишнего усложнения или избыточности применяются также и другие методы булевой алгебры.

Введение в систему избыточности повышает ее стоимость и часто сказывается на ее других параметрах, например на весе или размерах. В любой конкретной конструкции ценность дополнительной надежности должна сопоставляться с суммой соответствующих дополнительных затрат, дополнительным весом и т. д. Исследования такого рода часто называются отысканием компромиссного решения. Фактически чаще всего это просто вопрос минимизации общих затрат. Конструкционная избыточность, вносимая в компонент или систему, является одним из способов повышения надежности, каждый из которых увеличивает начальные затраты, но снижает стоимость эксплуатации. Качественно эта ситуация отображена на рис. 15.5. Здесь R_1 обозначает надежность

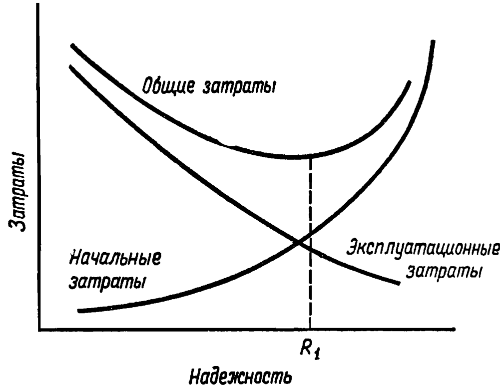


Рис. 15.5.

конструкции при минимальных общих затратах. Разумеется, в ряде случаев могут играть роль не экономические, а другие соображения, как, например, при создании пилотируемых космических аппаратов.

15.6. Механическая надежность и запас прочности

Студентам инженерных специальностей известно (однако не всегда), что свойства «одного и того же» материала изменяются от образца к образцу. Если принять, что имеет место нормальное распределение, то получим ситуацию, отображенную на рис. 15.6, *а*. Заметим, что если нагрузке на конструкцию должна отвечать прочность S_1, то заштрихованная область соответствует вероятности отказа.

Фактическая нагрузка может иметь функцию распределения, изображенную на рис. 15.6, *б*. Заштрихованная область соответствует вероятности отказа. Кривая распределения вероятностей отказов находится путем умножения вероятности того, что данная нагрузка будет превышена (этой вероятности соответствует площадь под кривой распределения нагрузки справа от данной точки), на вероятность того, что прочность будет меньше указанной нагрузки (последней вероятности соответствует площадь под кривой распределения прочности слева от данной точки).

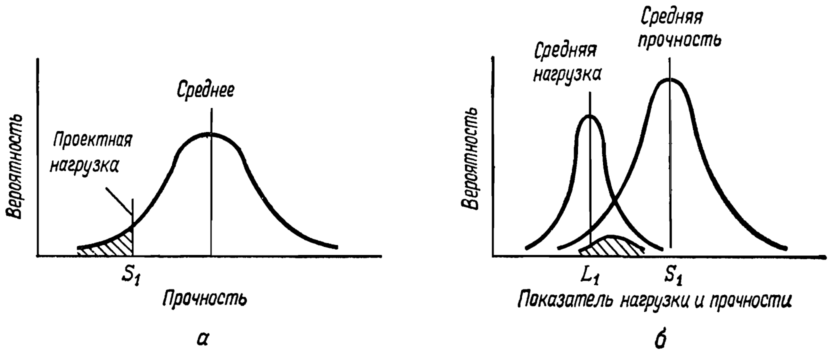


Рис. 15.6.

Это изложение с использованием вероятностей значительно отличается от рассмотрения вопроса в том случае, когда учитывается лишь запас прочности. Если такой способ используется при проектировании, то запас прочности равен S_1/L_1 (рис. 15.6, *б*). Вероятность отказа может быть совершенно различной при одном и том же запасе прочности при разных формах кривых (или разных средних квадратических отклонениях) прочности материала. Существенно новый подход к проектированию с учетом надежности требует учитывать вероятностное *распределение* свойств материала, нагрузки и т. д.

Разумеется, в качестве критерия при проектировании не обязательно нужно выбирать среднюю нагрузку и среднюю прочность. Проектная нагрузка может выбираться, например, на одно или даже два средних квадратических отклонения выше средней, а проектная прочность — на одно-два средних квадратических отклонения ниже средней. Такие решения принимаются либо произвольно, либо на основании имеющегося опыта, либо исходя из узаконенных или профессиональных норм и правил. Сказанное здесь относится к свойствам, которые не изменяются с течением времени.

15.7. Замечания о проектной надежности

В настоящее время при инженерном проектировании в одном ряду с такими известными ограничениями, как затраты, вес, производительность и прочность, стоит и надежность. Поэтому в известном смысле при проектировании нельзя учитывать *только одну* надежность, как нельзя учитывать лишь какое-либо одно ограничение. Принимая решения, инженер-конструктор должен искать пути удовлетворения всех минимальных требований и находить компромиссное решение в том случае, когда оптимальные значения выше минимальных. Хороший инженер-конструктор должен иметь представление о надежности точно так же, как о затратах, возможностях производства и т. д. Вообще говоря, существуют четыре способа повышения надежности при разработке компонентов и систем. Об одном из них — *избыточности* — уже упоминалось ранее. Ясно, что вторым способом является *простота* — чем меньше деталей, тем лучше с точки зрения надежности. Третьим методом является применение *стандартных элементов с известной и проверенной надежностью*. Наконец, конструктор может рекомендовать *снижение нагрузки*, т. е. работу элементов и систем не на полную мощность; такая практика обычно увеличивает срок службы оборудования.

15.8. Краткие выводы

Эта глава является очень кратким введением в теорию инженерной надежности. Надежность является примером использования теории вероятностей и математической статистики при принятии инженерных решений. Надежность инженерных систем приобретает все большее значение по мере того, как системы становятся все более сложными, и люди — каждый человек в отдельности и целые коллективы — оказываются во все большей зависимости от них.

В следующей главе дается обзор некоторых областей, которые приближенно можно назвать наукой о принятии решений. В настоящее время ни одна из этих областей пока еще не стала для инженера-конструктора столь же важной, как теория надежности. Однако это развивающиеся перспективные области, и они заслуживают внимания со стороны тех инженеров, которые желают быть в курсе всех возможных методов принятия инженерных решений.

Задачи

15.1. Рассмотрите с точки зрения кривой интенсивности отказов два вида гарантии на автомобиль: 1) 6 месяцев или 10 000 *км*; 2) 5 лет или 80 000 *км*. Какова цель каждой гарантии?

15.2. Вычертите кривую интенсивности отказов для «одноконной повозки».

15.3. Обратитесь к рис. 15.5. Иногда вместо проектной надежности R_1 надежность конструкции выбирается таким образом, чтобы получить оптимальное отношение надежности к общим затратам. Проведите из начала координат прямую, касательную к кривой общих затрат. Покажите, что точка касания определяет искомую надежность.

15.4. Перечислите как можно большее число возможных случаев выхода из строя механической конструкции.

15.5. Рассмотрите соотношение между запасом прочности и проектной надежностью в механических системах.

15.6. Интенсивность отказов электронного блока ракеты составляет 0,025 *отказ/час*. Вычислите наработку на отказ. Какова вероятность выхода из строя блока за 1 *час*? за 3 *час*?

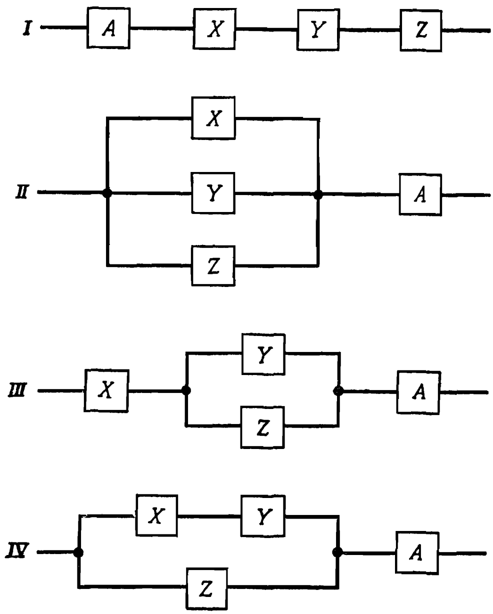
15.7. В процессе испытаний на надежность 600 элементов число отказов между 3-м и 4-м часами составило 34. К 3-му часу испытаний оставалось 356 исправных элементов, а к 4-му часу — 322. Какова интенсивность отказов?

15.8. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. В одном из блоков интенсивность отказов каждой детали составила 0,0001 *отказ/час*, а в другом блоке — 0,0002 *отказ/час*. Найдите надежность системы для 10-часового периода.

15.9. Было найдено, что для электронных ламп подходящим значением m в формуле для распределения Вейбулла является 1,7. Допустим, что для некоторого типа ламп $M = 17\,800$ *час*. Каково математическое ожидание надежности через 1000 *час*? через 600 *час*?

15.10. Для некоторого типа электронных ламп $M = 10^5$ *час* ($m = 1{,}7$). Если надежность должна составить 95%, то какой срок службы лампы можно гарантировать?

15.11. Рассмотрите системы, изображенные ниже. Запишите выражения для логической функции каждой из них. 1) Если каждый из элементов X, Y, Z имеет надежность R, вычислите надежность каждой системы. 2) Найдите надежность каждой системы, если AX имеет надежность e^{-Xt}, Y имеет надежность e^{-Yt} и т. д.



ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ[1)]

1. Bazovsky I., Reliability, Theory and Practice, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.
   Хороший учебник по теории надежности. Имеется русский перевод: Базовский И., Надежность. Теория и практика, М., «Мир», 1965.
2. Calabro S. R., Reliability Principles and Practices, McGraw-Hill, New York, 1962. Прекрасное изложение теории надежности с применением математического аппарата, доступного студентам технических вузов. Имеется русский перевод: Калабро С. Р., Принципы и практические вопросы надежности, М., «Машиностроение», 1966.
3. Haviland R. P., Engineering Reliability and Long Life Design, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1964.
   Эта книга в большей мере посвящена конкретным вопросам надежности механических конструкций, чем общему изложению теории надежности. Книга хорошо написана, и инженеры-конструкторы обязательно должны ее прочитать. Имеется русский перевод: Хевиленд Р., Инженерная надежность и расчет на долговечность, М., «Энергия», 1966.
4. Mechanical Reliability Concepts, United Engineering Center, 395 East 47th St., New York, N. Y., ASME Design Engineering Conference, New York, May 1965.
   Этот сборник является хорошим пособием для знакомства с понятиями теории надежности, главным образом нематематического характера. Настоятельно рекомендуется в качестве дополнительного источника.
5. Roberts N. H., Mathematical Methods in Reliability Engineering, McGraw-Hill, New York, 1964.
   Хотя математический аппарат, использованный в этой книге, сложнее, чем в книге Калабро, она вполне доступна студентам старших курсов.

[1)] См. также Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности, М., «Наука», 1965; Шор Я. Б., Статистические методы анализа в контроле качества и надежности, М., «Советское радио», 1962; Половко А. М., Основы теории надежности, М., «Наука», 1964; Райкин А. Л., Элементы теории надежности для проектирования технических систем, М., «Советское радио», 1967; Герцбах И. Б., Кордонский Х. Б., Модели отказов, М., «Советское радио», 1966; Сандлер Дж., Техника надежности систем, М., «Наука», 1966; Ллойд Д., Липов М., Надежность. Организация исследования, методы, математический аппарат, М., «Советское радио», 1964.— *Прим. перев.*

ГЛАВА 16

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ АДМИНИСТРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫМ ПРОЕКТИРОВАНИЕМ

16.1. Введение

Предыдущая глава была посвящена применению теории вероятностей и математической статистики в теории инженерной надежности. В этой главе рассматриваются общие вопросы административного управления процессом инженерного проектирования с позиций теории принятия решений. Некоторые из рассмотренных вопросов, например система ПЕРТ[1], имеют непосредственное отношение к административному управлению инженерным проектированием. Эффективность других математических дисциплин (например, теории полезности) в настоящее время не столь очевидна. Большинство рассматриваемых в этой главе предметов относится к недавно созданным и развивающимся научным дисциплинам. Они еще не находят применения в инженерном проектировании и административном управлении инженерным проектированием. Так оказалось, что некоторые из них больше подходят для административного управления торгово-промышленной деятельностью, чем для инженерного проектирования. Однако эти методы являются общими методами принятия решений и включены в эту книгу вследствие того, что они используются все шире и шире и в перспективе, по-видимому, будут применяться и в инженерном проектировании.

16.2. Теория принятия решений

Как указывалось в гл. 11, существенной чертой процесса принятия решений является возможность выбора альтер-

[1] PERT (Program Evalution and Review Technique) — метод оценки и пересмотра планов. В отечественной литературе эта система получила название «сетевое планирование и управление» (СПУ).— *Прим. перев.*

нативных линий поведения. Теория принятия решений требует определения некоторых понятий, с тем чтобы придать элементам процесса принятия решений бо́льшую точность и конкретность.

Альтернативные линии поведения. Обозначим возможные действия (альтернативы) через a_1, a_2, a_3, ..., a_n. В обыденном примере человек, идя на работу, может взять с собой плащ (a_1) или не брать его (a_2). Инженер, участвующий в разработке искусственного спутника Земли, в качестве материала для его корпуса может выбрать, например, алюминий, сталь или титан. Эти альтернативы можно обозначить соответственно через a_1, a_2 и a_3.

Внешние условия. Обычно существуют условия, которые неподконтрольны лицу, принимающему решения. Мы назовем их внешними условиями, и для их обозначения здесь будет использован символ θ. Например, может идти дождь (θ_1), или дождя может не быть (θ_2).

В случае разработки корпуса спутника внешними условиями являются размер и частота появления метеоритных тел, с которыми будет сталкиваться спутник. Природное явление такого рода является скорее непрерывным, чем дискретным. (Дождь ведь тоже явление непрерывного типа. Так, дождя может не быть, он может моросить, слегка накрапывать и т. д.) Обычно такие ситуации описываются путем деления непрерывного распределения природного явления на произвольное удобное число дискретных состояний. Допустим поэтому, что метеорные потоки, которые может встретить спутник, описываются следующим образом: θ_1— очень разреженный поток, θ_2— разреженный, θ_3— средний, θ_4— плотный, θ_5— очень плотный. На практике должно быть задано конкретное определение этих состояний, однако здесь для иллюстрации даются лишь качественные определения.

Потеря или выигрыш. Полезность. Таким образом, принимая решение, исходят из того, что некоторые цели, характеризуемые разной степенью желательности, достигаются с различной степенью достоверности при различном выборе альтернативных линий поведения. Конкретная линия поведения имеет, разумеется, вероятность успеха несколько меньше единицы. Теперь можно составить так называемую таблицу (или матрицу) потерь. Для каждой заданной комбинации «линия поведения—внешнее условие» имеют место определенные затраты. В данном случае «затратами» могут быть деньги, однако к ним могут относиться и многие другие факторы, например время, престиж, потеря невосполнимых ресурсов и т. д. Все эти факторы могут измеряться одним показателем, называемым *полезностью*. Полезность можно рассматривать как некоторого рода обобщенные потери или выигрыш, когда все ценности приведены к одной шкале. Теория полезности рассматривается в разд. 16.3, а пока что мы предположим, что шкалы полезности уже рассчитаны и получены таблицы потерь: табл. 16.1 для примера с плащом и табл. 16.2 для конструкции спутника.

Таблица 16.1

Таблица потерь для примера с плащом

Линия поведения	Внешние условия	
	дождь θ_1	нет дождя θ_2
Взять плащ, a_1	1	2
Не брать плаща, a_2	7	0

Таблица 16.2

Таблица потерь для случая выбора материала корпуса спутника

Линия поведения	Внешние условия				
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
a_1	2	7	12	12	12
a_2	5	5	10	15	15
a_3	6	6	6	11	16

Если полезность естественным образом приводит к выигрышу, а не к потерям, то выигрыш можно легко превратить в потери, просто вычитая из каждой величины значение наибольшего выигрыша. Тогда все элементы будут отрицательны либо равны нулю. Поскольку отрицательный выигрыш есть потеря, то знак минус можно опустить, и в результате получим таблицу потерь.

Вероятности, характеризующие внешние условия. Как можно видеть, вопрос может значительно усложниться, если вероятности различных потерь различны. Например, при условии θ_2 выбор альтернативы a_1 с вероятностью p_1 может привести к потерям L_1 и с вероятностью p_2 — к потерям L_2. Однако в данном примере, который дается здесь лишь для иллюстрации, мы рассмотрим только вероятности, отнесенные к различным внешним условиям. Пусть Бюро прогнозов установило, что вероятность дождя $p(\theta_1)=0{,}30$, а вероятность отсутствия осадков $p(\theta_2)=0{,}70$, и пусть в результате запуска предыдущих спутников получена следующая информация:

Внешнее условие	Вероятность
θ_1	0,10
θ_2	0,20
θ_3	0,40
θ_4	0,20
θ_5	0,10

Математическое ожидание потерь. Теперь можно вычислить математическое ожидание потерь при выборе каждой возможной линии поведения. Напомним, что математическое ожидание случайной величины x равно

$$E(x)=\sum_i p_i x_i,$$

поэтому для простого примера с плащом математические ожидания потерь при выборе альтернатив a_1 и a_2 составят соответственно

$$E_{a_1}=0{,}30\times 1+0{,}70\times 2=1{,}7,$$
$$E_{a_2}=0{,}30\times 7+0{,}70\times 0=2{,}1.$$

Таким образом, чтобы минимизировать ожидаемые потери, нужно принять альтернативу a_1, т. е. взять с собой плащ.

В примере выбора материала для корпуса спутника математические ожидания потерь равны

$$E_{a_1} = 0{,}1\times2+0{,}2\times7+0{,}4\times12+0{,}2\times12+0{,}1\times12=10{,}0,$$
$$E_{a_2} = 0{,}1\times5+0{,}2\times5+0{,}4\times10+0{,}2\times15+0{,}1\times15=10{,}0,$$
$$E_{a_3} = 0{,}1\times6+0{,}2\times6+0{,}4\times6+0{,}2\times11+0{,}1\times16=8{,}0.$$

Таким образом, модель, построенная на основе теории принятия решений, указывает, что инженеру следует выбрать альтернативу a_3. (Цифры в этом примере условны и не обязательно должны в точности соответствовать реальной ситуации.)

Минимакс. Хотя, принимая решение, по-видимому, разумно использовать в качестве критерия математическое ожидание потерь, все же иногда в этом случае могут применяться и другие критерии. Одним из обычных показателей является *минимакс*. Этот метод требует *минимизации максимальных потерь*. Таким образом, этот консервативный критерий гласит: выбирайте стратегию, при которой вероятность больших потерь минимальна. В примере с плащом максимальные потери составляют 7 при выборе альтернативы a_2 и 2 при выборе a_1. Таким образом, минимакс требует выбора альтернативы a_1. Заметим, что иллюстрацией консервативности этого метода является то, что он требует выбора альтернативы a_1 независимо от прогноза погоды.

В примере с выбором материала для корпуса спутника максимальные потери составляют 12 для альтернативы a_1, 15 для a_2, 16 для a_3. Минимальное значение максимальных потерь равно 12 (при выборе альтернативы a_1). Метод минимакса рекомендует выбор альтернативы a_1, в то время как рассмотрение математических ожиданий потерь показывает, что альтернатива a_3 лучше. Объективный способ выбора критерия отсутствует. Ранее указывалось, что при принятии решений многое определяется личным вкусом. Это справедливо даже в теории принятия решений, так как критерий (математическое ожидание потерь, минимакс или какой-либо другой) выбирается субъективно.

Стратегии. В зависимости от конкретных условий рассматриваемой задачи возможны различные варианты изложенной выше методики принятия решений. Часто, например, ситуация такова, что можно использовать определенную *стратегию.* Обычно это имеет место тогда, когда должен приниматься ряд аналогичных решений. Стратегия есть *план принятия решения.*

Для иллюстрации стратегий достаточно рассмотреть простой пример принятия решения относительно плаща. Каждый день человек слушает прогноз погоды, и каждый день он должен решать, брать или не брать с собой плащ. На основании многолетнего опыта он узнал, что Бюро прогнозов дает один из следующих прогнозов: вероятность дождя $p(\theta_1)$ равна 0; 0,25; 0,50; 0,75 или 1,0. Кроме того, он узнал, что, когда бюро прогнозов утверждает, что $p(\theta_1)=0$, в действительности в 5% случаев идет дождь. Другая информация такого рода дается в табл. 16.3. Эту информацию следует рассматривать как экспериментальные данные, помогающие принять решение. Теперь, имея эти данные, можно

Таблица 16.3

Вероятности того, что прогноз погоды будет правилен (пример с плащом)

Прогноз	Внешние условия	
	дождь θ_1	нет дождя θ_2
$p(\theta_1)=0,25$	0,10	0,20
$p(\theta_2)=0,50$	0,20	0,15
$p(\theta_3)=0,75$	0,25	0,10
$p(\theta_4)=1,00$	0,40	0,05

определить стратегии. Возможные стратегии сведены в табл. 16.4. Например, стратегия S_1 требует выбирать альтернативу a_2, когда, согласно прогнозу, вероятность дождя $p(\theta_1)$ равна 0, 0,25 или 0,50, а в противном случае — выбирать альтернативу a_1. Стратегия S_2 требует брать плащ (альтернатива a_1) всегда и т. д. Здесь приведены четыре стратегии, однако их может быть значительно больше.

Когда стратегии перечислены, можно определить *вероятности различных альтернатив.* Обратите внимание на то, что в табл. 16.3 даются различные вероятности того, что может пойти дождь. Таким образом, в день, когда может

Таблица 16.4

Стратегии в примере с плащом

Стратегии	Прогноз				
	$p(\theta_1)=0,0$	$p(\theta_1)=0,25$	$p(\theta_1)=0,50$	$p(\theta_1)=0,75$	$p(\theta_1)=1,00$
S_1	a_2	a_2	a_2	a_1	a_1
S_2	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1
S_3	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2
S_4	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2

пойти дождь (θ_1), существует вероятность, равная 0,05, того, что прогнозом будет $p(\theta_1)=0$, и т. д. В данном случае стратегия S_1 требует, чтобы при $p(\theta_1)$, равной 0, 0,25 и 0,50, выбиралась альтернатива a_2, что, согласно табл. 16.3, будет иметь место в 35% случаев. Следовательно, для стратегии S_1 и внешнего условия θ_1 вероятность альтернативы a_2 равна 0,35, а вероятность альтернативы a_1 равна 0,65. Вероятности других альтернатив находятся аналогично; они приводятся в табл. 16.5.

Таблица 16.5

Вероятность различных альтернатив в примере с плащом

Прогноз	Альтернативы							
	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1	a_2
θ_1	0,65	0,35	1,00	0	0,40	0,60	0	1,00
θ_2	0,85	0,15	1,00	0	0,05	0,95	0	1,00
	S_1		S_2		S_3		S_4	

После определения вероятностей различных альтернатив при каждом внешнем условии можно определить *средние потери* при различных стратегиях. При выборе стратегии S_1, когда выполняется условие θ_1, вероятность альтернативы a_1 составляет 0,65, и из табл. 16.1 находим, что потери для (a_1, θ_1) равны 1. Вероятность альтернативы a_2 равна 0,35, и соответствующие потери равны 7. Таким образом, средние потери равны

$$0{,}65 \times 1 + 0{,}35 \times 7 = 3{,}10.$$

При внешнем условии θ_2 средние потери составляют

$$0{,}85 \times 2 + 0{,}15 \times 0 = 1{,}70.$$

Значения 3,10 и 1,70 представляют собой средние потери при выборе стратегии S_1 соответственно при условиях θ_1 и θ_2. В табл. 16.6 показаны средние потери для других стратегий.

Таблица 16.6

Средние потери в примере с плащом

	S_1	S_2	S_3	S_4
θ_1	3,10	1,00	4,60	7,00
θ_2	1,70	2,00	0,10	0,00

Заметим, что по содержанию табл. 16.6 очень похожа на табл. 16.1. Действительно, стратегии S_2 и S_4 в точности соответствуют данным из табл. 16.1, однако стратегии S_1 и S_3 совсем иные. Таблица дает средние потери, получаемые тогда, когда данной стратегии придерживаются в течение некоторого промежутка времени.

Имея данные, приведенные в табл. 16.6 для выбора наилучшей стратегии, можно непосредственно использовать метод минимакса. Для этого нужно выбрать стратегию, при которой максимальные потери составляют 2,0.

Чтобы можно было использовать математическое ожидание потерь, необходимо получить данные о среднем числе дней θ_1 и θ_2. Допустим, что путем изучения фактических данных установлено, что в рассматриваемом районе 10% дней являются дождливыми. Тогда для каждой стратегии математическое ожидание потерь E_S можно вычислить следующим образом:

$$E_{S_1} = 0{,}10 \times 3{,}10 + 0{,}90 \times 1{,}70 = 1{,}84,$$
$$E_{S_2} = 0{,}10 \times 1{,}00 + 0{,}90 \times 2{,}00 = 1{,}90,$$
$$E_{S_3} = 0{,}10 \times 4{,}60 + 0{,}90 \times 0{,}10 = 0{,}55,$$
$$E_{S_4} = 0{,}10 \times 7{,}00 + 0{,}90 \times 0{,}00 = 0{,}70.$$

На основе вычисленных таким путем математических ожиданий наилучшей является стратегия S_3, и снова выбор оказался несколько менее консервативным, чем при использовании минимакса. Существенно, однако, то, что при применении любого из этих методов каждая из стратегий (S_1 или S_3) оказывается лучше соответствующей стратегии S_2 или S_4, принимаемых при негибких планах, не допускающих выбора.

Смешанные стратегии. Можно получить также стратегии. основанные на случайности. Например, возможна такая стратегия: «если бюро прогнозов дает прогноз $p(\theta_1) = 0{,}25$, я буду случайным образом выбирать стратегии a_1 и a_2, с тем чтобы $p(\theta_2) = 0{,}25$». Такие стратегии здесь не будут рассматриваться подробно, однако они довольно часто встречаются в теории игр, где их случайный характер не позволяет противнику раскрыть план на данный день, поскольку плана не существует.

В этом разделе были изложены основные идеи теории принятия решений. Как уже указывалось в начале раздела, теория принятия решений пока еще не получила сколько-нибудь существенного применения в административном управлении инженерным проектированием. Этот метод находит некоторое применение в административном управлении торгово-промышленными предприятиями и при анализе военно-стратегических решений. Вопрос о возможности его применения в инженерной практике предлагается решить самим читателям.

16.3. Теория полезности

Когда в предыдущем разделе при изложении теории принятия решений приводилась таблица потерь, там было сказано, что «потери» оцениваются не только денежными суммами. Во многих случаях потенциальными затратами являются такие факторы, как престиж, доброжелательное отношение, репутация, время, беспокойство и др. Даже в том случае, когда рассматриваются деньги, их ценность или полезность нельзя считать прямо пропорциональной сумме, которой вы располагаете. Это положение нетрудно проиллюстрировать на примере. Сравните ценность тысячи долларов для миллионера с ценностью этой суммы для вас (миллионеры исключаются!). Чтобы составить таблицу потерь или вложить смысл в теорию принятия решений и теорию игр, прежде всего необходимо ввести понятие полезности. Идея, на которой основывается это понятие, состоит в том, что строится единая шкала, называемая полезностью. На этой шкале можно найти точку, отвечающую определенному событию или исходу. Теория полезности, таким образом, основана на идее, что существует некоторое число, обозначаемое обычно как $U(P)$, которое может быть поставлено в соответствие любому возможному событию (ожидаемому событию P) и показывает полезность этого события.

Шкала полезности основана на личном предпочтении. Если отдается предпочтение P_1 по сравнению с P_2 (например, 10 долл. по сравнению с 5 долл.), то $U(P_1)>U(P_2)$. Допускается также, что имеют смысл смешанные события. Так, P_3 может быть комбинацией таких событий P_1 и P_2, что вероятность появления события P_1 равна p, а вероятность появления события P_2 равна $1-p$. Тогда

$$U(P_3) = pU(P_1) + (1-p)\,U(P_2).$$

Это важные допущения. Часто очень трудно принять решения так, как этого требует теория полезности. Предпочитаете ли вы получить 1000 долл. со 100%-ной вероятностью или же 10 000 долл. с вероятностью 1%? Предпочитаете ли вы провести месяц в Париже в ожидании рейса абсолютно надежного теплохода или улететь сразу при 0,001%-ной вероятности погибнуть при авиационной катастрофе? Кроме трудностей, возникающих при принятии решений, применение теории полезности осложняется еще и тем, что принятие решения и его выполнение — различные вещи. Так, человек может сказать, что он предпочитает одно другому, однако если потребуется действовать, то его дела и слова будут совпадать не всегда. Поэтому в теории полезности важно, чтобы лицо, принимающее решения, подкрепляло высказанные им решения своим поведением.

В теории полезности предполагается, что люди, сталкиваясь с событиями или возможными исходами (некоторые из них могут быть смешанными, как упоминавшееся выше событие P_3), могут решать, что они считают предпочтительным и что эти решения являются правильным и надежным показателем их поведения. Для иллюстрации построения шкалы полезности воспользуемся оценками по курсу «инженерного проектирования», которые предпочел один из студентов при определенных условиях. Поскольку абсолютные значения чисел на шкале полезности выбраны произвольно, оценке A можно поставить в соответствие 10, а оценке F — 0. Эти значения выбраны просто для удобства. Так,

$$U(A) = 10, \quad U(F) = 0.$$

Теперь для определения полезности промежуточных оценок студент должен сформулировать свое предпочтение смешанным событиям. Чтобы найти полезность оценки B, студенту предложили определить значение p, удовлетворяющее соотношению

$$U(B) = pU(A) + (1-p)\,U(F).$$

Студента спросили: «Предпочитаете ли вы получить оценку B или же с вероятностью 0,1 оценку A и с вероятностью 0,9 оценку F?». Здесь принято $p=0{,}1$. На этот вопрос студент сразу ответил, что он предпочитает оценку B. Затем значение p изменяется. «Предпочитаете ли вы получить оценку B или же с вероятностью 0,5 оценку A и с вероятностью 0,5 оценку F?» И снова студент предпочитает получить оценку B. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не находится такое значение p, при котором студент отдает равное предпочтение обоим этим событиям (т. е. оценке B или комбинации A и F для данного значения p). В рассматриваемом примере студент совсем не хотел рисковать и очень боялся оценки F, поэтому значение p, на котором он окончательно остановился, равно 0,99. При $p=0{,}99$ находим, что

$$U(B) = 0{,}99 \cdot 10 + 0{,}01 \cdot 0 = 9{,}9.$$

Аналогичным путем можно найти $U(C)$ и $U(D)$. Результаты показаны на рис. 16.1. Хотя в данном случае кривая не имеет смысла, поскольку оценки не непрерывны, а дискретны, все же нами построена кривая, характеризующая форму кривых полезности. На рис. 16.2 показана кривая полезности денег, полученная на основе предпочтений того же

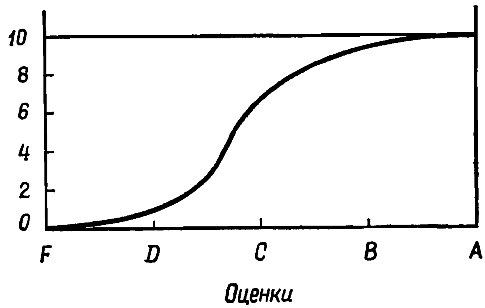


Рис. 16.1. Кривая полезности для оценок.

студента. Чтобы получить эту кривую (заметим, что по оси абсцисс взята логарифмическая шкала), были произвольно

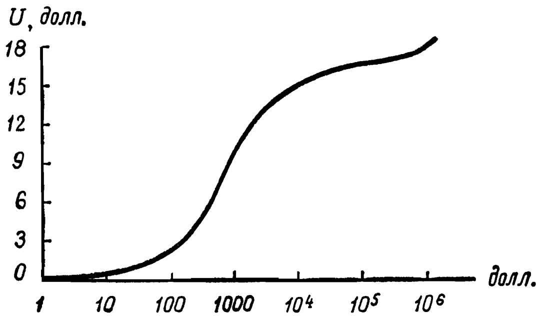


Рис. 16.2. Кривая полезности для денег.

установлены значения полезности 0 и 10 соответственно для 1 и 1000 долл. Обратите внимание на типичную форму кривой и на второй скачок, который иногда имеет место в области больших количеств такого товара, как деньги. Ясно, что ценность денег не прямо пропорциональна их количеству.

Очевидна связь полезности с риском и инвестициями, подобными страхованию. При заключении пари необходимо оптимизировать ожидаемую *полезность*. После этого можно заключить *хорошее* пари при математически *неблагоприятных* шансах. Аналогичное положение имеет место и при страховании имущества. Страховая компания «делает деньги», и ясно, что клиенты, покупающие страховой полис, не

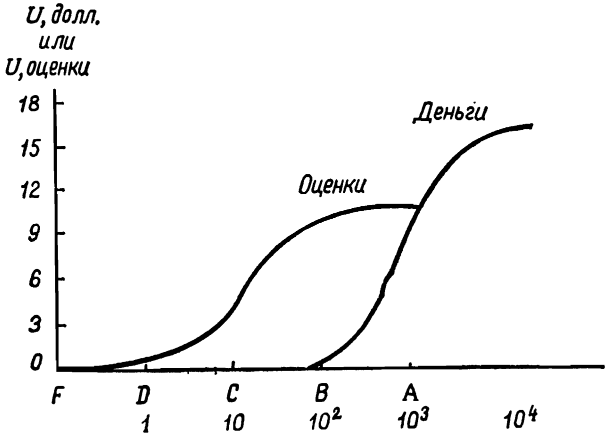


Рис. 16.3. Объединение двух кривых полезности.

получают обратно уплаченной ими суммы плюс соответствующие проценты. Однако вследствие того, что кривая полезности денег для большинства людей отражает тот факт, что при больших потерях они терпят серьезные лишения, и вследствие того, что страховые компании располагают огромными финансовыми средствами, как клиенты, так и страховые компании извлекают *пользу* из своего сотрудничества. Вообще говоря, когда суммы невелики, люди могут заключать сделки при математически неблагоприятных шансах, но, когда суммы становятся большими, они будут настаивать на более чем благоприятных шансах.

Часто для данной ситуации можно построить единую шкалу, но иногда бывает необходимо вычертить отдельные кривые для каждого из отдельных факторов (таких, как время, деньги, престиж и т. д.). При использовании в теории принятия решений или теории игр таблицы потерь, конечно, нужна единая шкала для объединения отдельных кривых. Это легко выполнить в том случае, когда на этих кривых можно найти отвечающие друг другу точки. Если бы, например, студент, кривые полезности для которого изображены на рис. 16.1 и 16.2, захотел представить на единой шкале и оценки и деньги, то ему пришлось бы принять некоторые решения относительно своих предпочтений к деньгам и оценкам. Он может, например, решить, что оценка A стоит 1000 долл., а оценка F для него вообще не имеет никакой ценности в денежном выражении. Теперь можно построить единую шкалу, как это показано на рис. 16.3. Оба фактора находятся на единой шкале полезности, допускающей их сравнение, и могут использоваться для составления таблиц полезности. Заметим, что для использования новой шкалы кривую полезности денег нужно построить в линейном масштабе.

16.4. Теория игр

Теория игр и теория принятия решений тесно связаны друг с другом, однако между ними существует значительное различие. В теории принятия решений, изложенной в общих чертах в разд. 15.2, рассматривались внешние условия. Знание их не обязательно должно быть полным, однако предполагалось, что эти условия не изменяются. В ситуации, связанной с принятием решений, лицо, принимающее решение, придерживается некоторой стратегии, причем выбор стратегии никак не влияет на эти условия. В теории игр рассматривается разумный противник, который также может придерживаться некоторой стратегии. Иногда модель теории принятия решений называется *игрой против природы*, и природа рассматривается как *противник*. Однако обычно теория игр ограничивается такими ситуациями, когда имеются два или большее число разумных противников.

В этом разделе мы лишь кратко познакомимся с понятиями и принципами теории игр. Теоретико-игровые ситуации в наибольшей степени интересуют руководителей торгово-промышленных предприятий. При инженерном проектировании в качестве противника чаще всего выступает природа, и поэтому здесь более вероятно использование теории принятия решений.

Наиболее простой является игра двух лиц с нулевой суммой. Предположим, что два лица A и B, ведущих игру, могут пользоваться *платежными матрицами*, изображенными ниже, но не могут общаться друг с другом.

	b_1	b_2
a_1	$+2$	$+1$
a_2	$+3$	-2

Выигрыш для A

	b_1	b_2
a_1	-2	-1
a_2	-3	$+2$

Выигрыш для B

Каждый из игроков должен выбирать линию поведения независимо от другого. Так, игрок A должен выбрать ход a_1 либо ход a_2, а игрок B должен выбрать b_1 или b_2. Игра называется игрой с нулевой суммой, когда выигрыш игрока A всегда равен проигрышу игрока B. В игре с нулевой суммой нет источника полезности и не происходит ее убыли. То, что один игрок теряет, другой выигрывает. Заметим, что значения, записанные в платежных матрицах, строго говоря, являются полезностями. Часто матрица для противника бывает не известна, и это делает игру иной (и более сложной). В рассматриваемом примере считается, что матрицы известны.

В данном случае игрок A может выбрать один из двух ходов: a_1 и a_2, а игрок B — один из двух других ходов: b_1 и b_2. Как будет рассуждать игрок A? Первое, что приходит в голову,— это необходимость учитывать возможности игрока B. Например, игрок A замечает, что игроку B лучше сделать ход b_2 независимо от того, какой ход сделает игрок A. Так, если игрок A выбирает ход a_1, то игроку B лучше выбрать ход b_2. Если же игрок A сделает ход a_2, то игроку B также лучше всего выбрать ход b_2. Следовательно, разумный игрок B сделает ход b_2, игрок A, очевидно, выберет ход a_1. Таким образом, эта игра имеет единственное и очевидное решение (a_1, b_2). Точка (a_1, b_2) называется *седловой точкой*. Существует большое число способов, позволяющих показать, что даже сложные игры могут иметь седловую точку. Таким образом, если оба игрока склонны поступать рационально и при этом исходят из рациональности действий своего противника, то седловая точка является очевидным решением, устраивающим обоих игроков. В этом случае говорят, что игра «устойчива».

Игру с нулевой суммой без седловой точки можно свести к игре с седловой точкой, если такую игру проводить много раз. В этом случае можно показать, что для каждого игрока существует смешанная стратегия (каждый игрок выбирает свои альтернативы в течение определенного времени), следуя которой каждый игрок получает максимально возможный выигрыш. Читатели, желающие более глубоко изучить теорию игр, могут обратиться к списку рекомендуемой литературы.

Существуют различные варианты игры с ненулевой суммой, но для иллюстрации игр этого типа служит классический пример дилеммы, стоящей перед подследственными. Двух человек подозревают в том, что они сообща совершили серьезное преступление. Их содержат в одиночных камерах и по очереди выводят на допрос. Так как они действительно совершили преступление, то каждому из них открыты две альтернативы: сознаться или молчать. Полиция не располагает доказательствами того, что именно они совершили это серьезное преступление, но у нее имеются улики против обоих в совершении ими более мелкого преступления, которое влечет за собой легкое наказание. Ввиду этого полиция предложила полную свободу тому из них, кто сознается. Тогда другой будет признан виновным в совершении серьезного преступления и приговорен к длительному сроку заключения. Разумеется, если они сознаются оба, то и оба получат длительные сроки, несколько уменьшенные благодаря их признанию. Платежная матрица для данной задачи выглядит примерно так:

	b_1	b_2
a_1	—5, —5	10, —10
a_2	—10, 10	5, 5

В этой таблице вначале записан выигрыш для игрока A; альтернативы a_1 и b_1 означают признание, а a_2 и b_2— непризнание.

Для подследственных это представляет собой острую дилемму. (Вспомним, что они лишены возможности общаться друг с другом.) Если они решают не сознаваться (a_2, b_2), то каждый получает $+5$. Однако если бы, к примеру, заключенный A был уверен, что заключенный B будет молчать, то он бы выбрал альтернативу a_1 и благодаря этому увеличил свой выигрыш до $+10$. Заключенный B, предвидя эту возможность, не захочет остаться с проигрышем —10 и поэтому может выбрать альтернативу b_1. В результате получаем (a_1, b_1), что означает проигрыш —5 для каждого игрока. Оказывается, что стойкое отрицание вины даст каждому из них выигрыш по $+5$, если же оба преследуют свои собственные интересы, то оба и проигрывают!

Такие дилеммы не имеют решений. Если подследственные придерживаются определенных норм поведения (в данном случае групповая мораль требует соблюдения законов чести преступного мира, т. е. не «раскалываться»), выиграют оба; если они эгоцентричные люди, оба проиграют. Если этих норм поведения придерживается лишь один из них, а другой — эгоцентричный индивидуалист, то последний получит крупный выигрыш, а первый крупно проиграет. Из этого примера не следует делать вывода о том, как вести себя в общем случае, так как можно составить различные платежные матрицы, анализ которых приведет к другим выводам. Существо вопроса состоит в том, что теория игр позволяет построить модель для изучения определенных конфликтных ситуаций или процессов принятия решений.

Таково содержание теории игр. Возможность использования ее в торгово-промышленной деятельности очевидна, хотя, как и в случае теории принятия решений, современный уровень знаний еще не обеспечивает высокой точности при оценке вероятностей или получении данных о полезности.

16.5. Метод критического пути и метод ПЕРТ

В последние годы были созданы два метода, облегчающих планирование инженерных разработок, опытно-конструкторских работ и других проектов, а также руководство этими проектами. Одним из них является метод критического пути; он будет рассмотрен в этом разделе. Другой — метод ПЕРТ — рассматривается в следующем разделе.

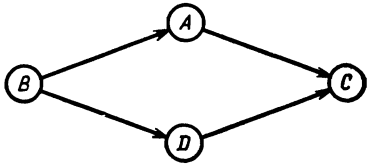
Ни метод критического пути, ни ПЕРТ не являются методами принятия решений. Они помогают принимать решения, особенно в том отношении, что привлекают внимание к тем моментам, в которых необходимо принимать решения, но само принятие решения остается функцией лица; ответственного за проект. Метод критического пути и ПЕРТ позволяют определить время и ресурсы, необходимые для выполнения календарного графика реализации проекта.

Большинство понятий, на которые опирается метод критического пути, совпадает с понятиями, используемыми в методе ПЕРТ. Фактически ПЕРТ можно рассматривать как дальнейшее развитие или усложнение метода критического пути. В основе обоих методов лежит понятие *события*, определяемого как момент начала или завершения некоторой операции. Рассматриваемое событие *не является* каким-либо заданием или этапом проекта; событие является лишь моментом *начала* или *завершения операции*. Заметим, что на само событие не расходуется ни времени, ни ресурсов.

Первым этапом программы реализации метода критического пути или метода ПЕРТ является составление перечня событий, которые произойдут при выполнении проекта, и упорядочение их в логической последовательности. В качестве примера допустим, что фирма, выпускающая игрушки, занята поиском новых видов продукции и что была задумана идея создания игрушечной ракеты. Тогда на первом этапе реализации проекта могут иметь место следующие события:

A — закончено изучение рынка сбыта,
B — сформулирована идея создания игрушечной ракеты,
C — одобрена программа работ,
D — закончено исследование технической осуществимости проекта.

Заметим, что события перечислены здесь не в логической последовательности. В *сети* события располагаются уже в логической последовательности, и сама сеть выглядит следующим образом:

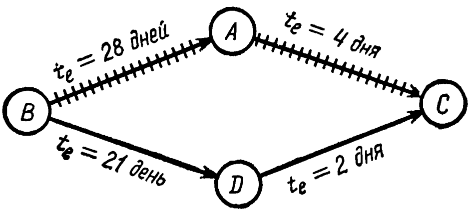


В сети кружками изображены *события*, а стрелками — *операции*. На выполнение операций *требуется определенное время*, а событие лишь фиксирует начало или конец операции. Сеть построена таким образом, что необходимая последовательность событий четко определена. Так, событие C не может наступить до тех пор, пока не наступят оба события A и B. Аналогично сеть показывает, что ни событие A, ни событие D не могут произойти ранее события B. Для построения сети руководитель проекта должен внимательно рассмотреть логическую последовательность и взаимную связь событий в проекте. Уже само по себе это является одним из самых ценных результатов применения методов критического пути и ПЕРТ.

Однако возможности этих методов значительно шире. Они позволяют руководителю найти в сети *критический путь*. Это оказывается возможным в результате оценки руководителем времени, которое требуется для выполнения операций, необходимых для реализации проекта. Допустим, что в изображенной выше сети продолжительность операций оценивается следующим образом:

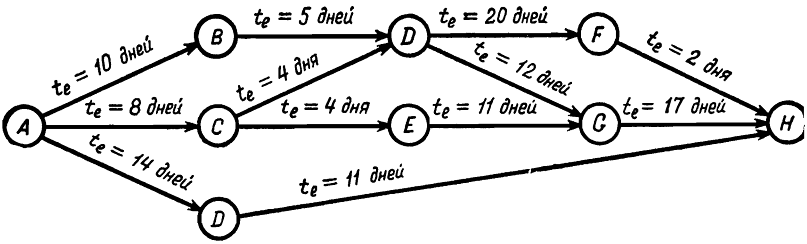
Операции	Предшествующее событие	Последующее событие	Наилучшая оценка продолжительности операции t_e, *день*
Изучение рынка сбыта	B	A	28
Изучение технических возможностей	B	D	21
Подготовка отчета о состоянии рынка сбыта	A	C	4
Подготовка технического отчета	D	C	2

На сети эту информацию можно изобразить следующим образом:



Критическим путем называется последовательность событий проекта, имеющая по времени наибольшую длину. В простой цепи, изображенной выше, критическим является путь *B — A — C*; он помечен поперечными штрихами. Другой путь *B — D — C* содержит *резерв времени*. Теперь руководитель знает, если он попытается сократить срок выполнения проекта, ему нужно сосредоточить усилия на критическом пути. Например, чтобы сократить критический путь, он может направить рабочую силу и средства с участков, опережающих график, на критический участок. Во всяком случае, ему теперь известно, где его ожидают наибольшие трудности, если ему придется уложиться в сроки согласованного календарного графика. Разумеется, информация, имеющаяся у руководителя, не будет точнее оценок времени, необходимого для выполнения операций. Как указывалось ранее, методы критического пути и ПЕРТ являются средством административного управления, однако *принятие решений по-прежнему остается функцией руководителя*. Совершенно очевидно, что точные оценки сможет делать лишь руководитель, обладающий необходимыми мастерством и опытом.

Обычно сети значительно сложнее, чем та, которая использовалась здесь в качестве примера. Допустим, что сеть имеет следующий вид:



Какой путь является критическим?

16.6. Метод ПЕРТ

В приведенной выше сети критическим является путь *A — B — D — G — H*. Общее время для выполнения соответствующих операций составляет 44 дня.

Метод ПЕРТ является несколько расширенным вариантом метода критического пути. До тех пор, пока не нужно получать оценки продолжительности операций, порядок применения метода ПЕРТ и метода критического пути одинаков. Так, и в методе критического пути и в методе ПЕРТ рассматриваются события и операции в одинаковом порядке, и применение этих методов начинается с построения сети, составленной из событий и операций проекта. На данном этапе метод ПЕРТ усложняется, так как при оценке продолжительности операции здесь используются *вероятности*. В частности, если при использовании метода критического пути записывалась только одна оценка продолжительности операции — наилучшая оценка, полученная руководителем проекта, то при использовании метода ПЕРТ для *каждой* операции берутся *три* оценки ее продолжительности:

t_1 — оптимистическая оценка — минимально возможный период времени, в течение которого может быть выполнена данная операция;

t_2 — наилучшая (наиболее вероятная) оценка — та же величина, которая использовалась в качестве оценки продолжительности выполнения операции в методе критического пути;

t_3 — пессимистическая оценка — максимально возможная продолжительность выполнения данной операции.

Обычно на этом этапе принимается некоторое распределение вероятностей, размах которого составляет шесть средних квадратических отклонений (6σ), т. е. принимается, что $t_3 - t_1 = 6\sigma$ и что, следовательно, среднее квадратическое отклонение и дисперсия равны соответственно

$$\sigma = \frac{1}{6}(t_3 - t_1), \quad \sigma^2 = \left(\frac{t_3 - t_1}{6}\right)^2.$$

Чтобы найти среднюю продолжительность выполнения операции, принимается, что распределение таково, что среднее время t_e равно

$$t_e = \frac{1}{6}(t_1 + 4t_2 + t_3).$$

Следующим этапом анализа проекта с помощью метода ПЕРТ является вычисление t_e для каждой операции и нахождение критического пути с использованием вычисленных значений t_e. Обращаясь снова к простому примеру фирмы, специализирующейся на производстве игрушек, допустим, что были получены следующие оценки продолжительности операций:

Операция	Оценка продолжительности операции				Дисперсия σ^2
	оптимистическая t_1	наиболее вероятная t_2	пессимистическая t_3	средняя t_e	
Изучение рынка сбыта	21	28	35	28	5,5
Изучение технических возможностей	17	21	28	21,5	3,4
Подготовка отчета о состоянии рынка сбыта	2	4	5	3,8	0,3
Подготовка технического отчета	1	2	3	2	0,1

Если T_E — самый ранний срок появления события, то для события C по пути $B—A—C$ $T_E=28+3{,}8=31{,}8=32$ дня. По пути $B—D—C$ $T_E=21{,}5+2=23{,}5=24$. Следовательно, $B—A—C$—критический путь, а $T_E=32$ дня— самый ранний возможный срок выполнения данного этапа проекта.

Найдите критический путь и самый ранний возможный срок выполнения проекта, которому соответствует сеть, изображенная в конце разд. 16.6, если по оценке руководителя операции имеют следующую продолжительность:

Предшествующее событие	Последующее событие	t_1	t_2	t_3	t_e	t^2
A	B	8	10	12	10	0,44
A	C	7	8	9	8	
A	D	10	14	18		
B	D	4	5	7		
C	D	2	4	5		
C	E	3	4	5		
D	F	15	20	30		
D	G	10	12	15		
E	G	10	11	12		
D	H	9	11	13		
F	H	1	2	3		
G	H	14	17	20		

Метод ПЕРТ оказывает помощь при составлении планов реализации проекта в директивный срок, а также при оценке вероятности выполнения проекта в намеченный срок. Самые поздние сроки обозначаются через T_1. Плановые сроки, или сроки по календарному графику, обозначаются через T_S. Допустим, что небольшой проект фирмы по производству игрушек должен быть осуществлен за 40 дней. Тогда самый поздний срок завершения изучения рынка составляет 40—32=8 дней (считая с этого дня). Заметим, что, поскольку другой путь имеет резерв времени, работа над инженерным проектом должна начинаться не позднее чем через 40—24=16 дней. Обратите внимание, что такого рода информация позволяет руководителю работы более эффективно использовать рабочую силу и материальные средства.

При оценке вероятности выполнения операции в намеченный срок T_S используется информация о дисперсии. Если принимается нормальное распределение сроков выполнения проекта, то оно будет характеризоваться математическим ожиданием T_E, и среднее квадратическое отклонение можно оценить из выражения

$$\sigma_{T_E} = [\sum_i (\sigma_i^2)]^{1/2} ,$$

где σ^2_i — дисперсия продолжительности выполнения i-й операции на критическом пути проекта. Таким образом, $\Sigma\sigma^2_i$ есть сумма дисперсий для критического пути. Теперь распределение сроков T_E будет выглядеть следующим образом:

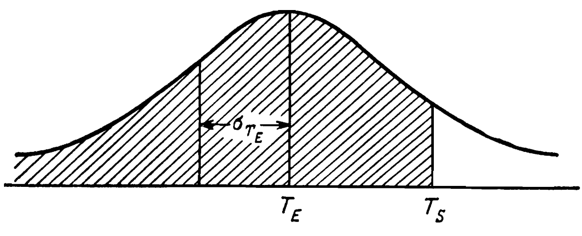


Рис. 16.4.

Площадь влево от точки T_S (заштрихованная площадь на рисунке) соответствует вероятности того, что рассматриваемое событие произойдет к моменту времени T_S. Эту вероятность можно найти из таблицы площадей, ограниченных кривой нормального распределения. Допустим, например, $T_E=32$, $\sigma_{Te}=[\sum_i(\sigma_i^2)]^{1/2}=(5{,}5+0{,}3)^{1/2}=2{,}4$, и что требуется найти вероятность того, что операция будет выполнена за 34 дня. В данном случае T_S находится вправо от T_E на 2,0/2,4=0,833 среднего квадратического отклонения. Затем с помощью таблиц находим, что площадь влево от T_S равна 0,797. Заметим, что если $T_S=T_E$, то эта вероятность равна 0,500. Если же T_S меньше T_E, то вероятность выполнения операции в указанный срок меньше 0,500. Какова в данном примере вероятность выполнения операции за 29 дней?

Так как 29 на 3 меньше среднего значения, равного 32, и среднее квадратическое отклонение равно 2,4, то T_S находится на 3,0/2,4=1,25 среднего квадратического отклонения вправо от T_E. Из таблицы площадей, ограниченных кривой нормального распределения, находим, что площадь влево от этого значения T_S составляет 0,1. Следовательно, вероятность того, что операция будет завершена за 29 дней, составляет лишь 0,1.

Таковы основные принципы метода ПЕРТ. По мере того как проекты и сети становятся крупнее и сложнее, объем вычислительных работ возрастает, но, как и прежде, вычисления остаются несложными. Получаемые результаты не точнее оценок руководителя, однако этот метод позволяет ему сосредоточить внимание на неотложных вопросах и использовать рациональный способ планирования, основанный на его собственных оценках. Во многих отраслях промышленности для выполнения вычислений при использовании метода критического пути и метода ПЕРТ в сложных проектах применяются электронные вычислительные машины, ведущие расчеты по стандартным программам.

16.7. Задача о назначении

Задачей о назначениях называется задача из области исследования операций, в которой n объектов должны быть распределены между n пунктами назначения таким образом, чтобы получить оптимальную отдачу. Задачи такого типа возникают, например, при автомобильной транспортировке грузов из одного города в другой, при направлении агентов по сбыту в определенные районы и т. д. Здесь будет рассматриваться задача о назначении (расстановке) инженеров по отдельным проектным работам.

Допустим, что у руководителя проекта имеются четыре инженера и четыре задания, которые необходимо выполнить. Инженеры отличаются друг от друга способностями, подготовкой и склонностями, а задания отличаются по характеру и сложности. Задача о назначении состоит в нахождении оптимального способа расстановки инженеров по отдельным проектам (заданиям), т. е. таком их назначении, при котором обеспечивается минимизация затрат.

Для начала руководитель должен оценить затраты, связанные с использованием каждого инженера для выполнения каждого задания. Лучше всего это представить в виде матрицы. При трех инженерах и трех заданиях соответствующая матрица — матрица затрат — может выглядеть следующим образом:

	Инженеры		
Задания	*A*	*B*	*C*
1	9	12	13
2	5	3	3
3	10	11	15

Один из способов решения такой задачи состоит в том, что просто выписываются все варианты. В данном случае $3!=6$ вариантов, т. е. такой подход здесь вполне уместен. Так, затраты при назначении инженера *A* на 1-е задание, инженера *B* на 2-е и инженера *C* на 3-е составляют $9+3+15=27$. Затраты при назначении инженера *A* на 2-е задание, инженера *B* на 1-е и инженера *C* на 3-е составляют $5+12+15=$ $=32$ и т. д.

Однако, когда число лиц и число назначений больше четырех ($5!=120$), необходим более практичный метод. Методы решения этих задач подробно рассматриваются в литературе по исследованию операций и здесь излагаться не будут.

Когда число лиц больше числа заданий, то эту задачу можно сформулировать как так называемую транспортную задачу, которая рассматривается в исследовании операций. Следует указать, что в любом случае составление матрицы затрат вызывает затруднения. Если получена точная, надежная матрица затрат, то решить задачу отыскания оптимального назначения не представляет труда. Однако до настоящего времени прогнозирование деятельности человека — дело весьма несовершенное, так что сводить таланты людей и их способности выполнять определенные задания к единственному числу в матрице — довольно ненадежное занятие. Тем не менее методы исследования операций оказываются полезными при управлении материальными средствами и со временем они могут оказаться полезными и при управлении людьми — в том числе и инженерами!

16.8. Краткие выводы

Как указывалось вначале, в этой главе дается обзор методов, эффективно используемых в настоящее время в области управления торгово-промышленной деятельностью и материально-техническим снабжением. В конечном счете эти методы могут найти применение и для управления инженерным проектированием. Теория принятия решений и теория игр — заманчивые области знания, однако здесь мы лишь кратко познакомились с ними. Ключ к применению этих методов в инженерном проектировании лежит в теории полезности (или аналогичной теории), поскольку она позволяет выражать ценность или полезность различных вещей по единой шкале, что является необходимым условием оптимизации ценности. Метод критического пути и метод ПЕРТ дают руководителям проектов возможность составлять планы и следить за ходом выполнения календарного графика. Задача о назначениях требует количественной информации о людях и заданиях, какую в настоящее время не всегда можно получить; впрочем, следует сказать, что руководители технических проектов всегда решают задачи о назначениях субъективно.

Эта глава завершает часть III книги, посвященную принятию решений. В самом начале инженерное проектирование было разбито на три составляющие: изобретательство, инженерный анализ и принятие решений. Каждый из этих процессов изучался нами довольно детально В эпилоге, завершающем книгу, после краткого рассмотрения трех этих процессов ставится задача квалифицированного синтеза в перспективе этих видов интеллектуальной деятельности в единое целое.

Задачи

16.1. Обсудите относительные достоинства минимакса и математического ожидания потерь в качестве критериев для принятия решений.

16.2. При составлении инженерного проекта используйте метод ПЕРТ.

16.3. При коллективном составлении инженерного проекта для распределения заданий используйте методику задачи о назначениях.

16.4. Рассмотрите еще раз, как вы решали задачу, в какой колледж поступать. Используйте при этом теорию принятия решений и теорию полезности.

16.5. Вам нужно решить — сделать самому или купить верстак для вашей домашней мастерской. Принимая решение, используйте теорию принятия решений.

16.6. Обсудите применимость теории принятия решений в ситуациях типа «сделать самому или купить».

16.7. В каких областях техники, по вашему мнению, найдут в будущем наибольшее применение теория принятия решений и теория полезности?

ЛИТЕРАТУРА И БИБЛИОГРАФИЯ

1. Chernoff H., Moses L. E., Elementary Decision Theory, John Wiley, New York, 1959.
Имеется русский перевод: Чернов Г., Мозес А., Элементарная теория статистических решений, М., «Советское радио», 1962.
Одно из лучших введений в теорию принятия решений.
2. Federal Electric Corporation: «A Programmed Introduction to PERT; John Wiley, New York, 1963.
Имеется русский перевод: Системы сетевого планирования и управления (Программированное введение в ПЕРТ), М., «Мир», 1965.
3. Fishburn P. C., Decision and Value Theory, John Wiley, New York, 1964.
Более глубокое изложение теории принятия решений с применением математического аппарата.
4. Rapoport A., Fights, Games and Debates, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1960.
Очень интересный нематематический обзор теории игр применительно к повседневной жизни.

ЭПИЛОГ

ОБЗОР ПРОЦЕССА ИНЖЕНЕРНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В этой книге инженерное проектирование подразделялось на три составляющих: изобретательство, инженерный анализ и принятие решений. Каждый из этих процессов существенно отличается от двух других. По этой причине каждый из них анализировался в отдельности. Прежде чем в этом заключительном разделе мы рассмотрим инженерное проектирование как единое целое, кратко остановимся на его отдельных составляющих.

Изобретательство — это способность получать хорошие, полезные идеи, которые можно использовать для решения инженерных задач. Изобретательство характеризуется незавершенностью, и эффективность этой деятельности зависит от восприимчивости и опытности инженера, она сковывается ограничениями, присущими человеку, и психологической инерцией. Хотя способности человека к изобретательству имеют естественный предел, все же большинство людей в своей работе далеко не исчерпывают своих естественных возможностей. Существуют как общие, так и конкретные методы совершенствования изобретательности, описанные в гл. 2.

Инженерный анализ — это получение имеющих смысл ответов на вопросы инженерного характера за приемлемое время и при допустимых затратах. Хотя процессу инженерного анализа и свойственны творческие черты, все же этот вид деятельности, опирающийся на здравый смысл и специальные знания, носит более узкий характер. Инженерный анализ предполагает построение физической или математической модели, использование основных физических принципов при анализе этой модели и истолкование полученных результатов. Имеются определенные свидетельства того, что наличие больших способностей к анализу или хорошая подготовка в этой области препятствует плодотворной изобретательской деятельности. Очевидно, что изобретательство и инженерный анализ отличаются друг от друга в том смысле, что цель изобретательства — *большое число возможных результатов*, а цель инженерного анализа — *один фактический результат*.

Эти два процесса отличаются друг от друга еще в одном отношении. Изобретательство — это создание альтернатив, а анализ — это исследование одной альтернативы. В этом смысле принятие решений есть процесс выбора одной альтернативы из многих. Принятие решения связано с информацией, оценкой ценностей и оптимизацией. Таким образом, изобретательство направлено на поиск возможных решений, инженерный анализ — на изучение одного решения, а принятие решений — на выбор *наилучшего решения*.

Психологи изучали способности к принятию решений в значительно меньшей мере, чем способности к изобретательству. Ввиду этого очень мало известно о том, как влияют на качества, необходимые инженеру для принятия решений, качества, необходимые ему, чтобы быть эффективным изобретателем и успешно справляться с инженерным анализом. Ясно, что изобретательство, инженерный анализ и принятие решений — три совершенно различных вида деятельности,— и инженер должен быть мастером в каждой этой области.

Трудность для инженера-проектировщика состоит не только в том, что эти три вида деятельности составляют процесс инженерного проектирования, но и в том, что работа инженера почти на любом этапе соткана из элементов всех этих трех процессов. Разумеется, на различных этапах преобладают те или иные виды деятельности, и в частном случае какой-либо из них может встретиться в чистом виде. Однако в общем случае инженер сталкивается с необходимостью *одновременно* и изобретать, и анализировать, и принимать решения. Поэтому хороший инженер-проектировщик должен по крайней мере уметь быстро переключаться от одной роли к другой.

При подготовке инженеров очень мало внимания уделяется тому, каким образом инженер может добиться эффективного совмещения этих трех родов интеллектуальной деятельности. Рекомендуется сознательно переходить от изобретательства к инженерному анализу и обратно, чтобы избежать их взаимного неблагоприятного влияния. Этот метод, по-видимому, можно распространить на процесс принятия решений, если, конечно, человека можно превратить в подобие трехпозиционного переключателя. Но это не помогает при принятии несметного числа мелких (и не столь уж мелких) решений, заполняющих процесс инженерного проектирования.

И, наконец, последнее замечание к вопросу совмещения изобретательства, инженерного анализа и принятия решений. Инженеру часто приходится принимать решения и двигаться дальше, не будучи уверенным в том, что принятое им решение является наилучшим, т. е. принятие решения часто *предшествует* анализу. Альтернатива, возможно, пригодная лишь на первый случай, должна быть принята, прежде чем ее можно будет проанализировать и оптимизировать. Такие решения не обязательно должны быть окончательными, их необходимо пересматривать в ходе анализа, но *их приходится принимать*! Это обстоятельство порождает часто высказываемое замечание, что «проектирование — это принятие решений». В действительности, конечно, проектирование — это также изобретательство и анализ (включая и выдачу результатов), однако нельзя отрицать и того факта, что среди качеств, необходимых отличному инженеру-проектировщику, решающую роль играет *способность принимать решения*.

Чтобы уяснить это, рассмотрим простой пример. Допустим, что необходимо разработать теплообменник, имеющий определенное назначение. В процессе проектирования определяются такие параметры, как длина трубы, ее диаметр, расположение, материал и т. д. Прежде чем вообще будет достигнут какой-либо прогресс, необходимо принять некоторые начальные решения. Невозможно проанализировать бесконечное число комбинаций. Чтобы ограничиться рассмотрением небольшого числа альтернатив или даже одной из них, такие решения (в некоторых случаях может потребоваться принятие большого числа решений в ходе реализации одного проекта) должны иметь определенный смысл, но все же их нужно принимать.

Итак, элементами инженерного проектирования являются изобретательство, анализ и принятие решений. К неотъемлемым качествам инженера относится и его умение принимать решения и двигаться дальше, а также умение распорядиться своим временем, энергией и способностями. Эти качества можно охарактеризовать как умение *планировать*. Такие качества инженера, как умение планировать, желание принимать решения, умение совмещать изобретательство, инженерный анализ и принятие решений в одно целое, характеризуют еще одну особенность процесса проектирования. В настоящее время эту четвертую сторону процесса инженерного проектирования можно изучать только на практике при разработке реальных проектов. Как обычно, *кое-что* оставим студентам в качестве упражнений.

Некоторые идеи для разработки инженерных проектов

1. Разработайте игрушку или игру, иллюстрирующую или использующую инженерное мастерство, физический принцип или идею. С самого начала определите возрастную группу детей, на которую игрушка рассчитана. Игра может называться «Оптимизация» или «Оценка», а игрушка — «Система обратной связи».
2. Сконструируйте контейнер с такими характеристиками, чтобы при его падении с третьего этажа вложенное в него свежее яйцо не разбилось. Максимальные вес и габариты контейнера считайте заданными.
3. Разработайте теплообменник минимального объема для понижения температуры крови, который позволил бы за 20 *мин* снизить температуру тела собаки от номинальной до 5° С. Исходите из допущения, что прибор можно соединить последовательно с сердцем таким образом, чтобы охлажденная кровь циркулировала через систему кровообращения собаки.
4. Разработайте систему для подачи переменного количества воздуха постоянной температуры с целью проведения психофизиологических экспериментов.
5. Разработайте прибор для измерения «эффективной температуры». В учебнике по кондиционированию воздуха ознакомтесь с понятием «эффективной температуры».
6. Разработайте ручную тележку на воздушной подушке для внутрицеховой транспортировки деталей.

7. Разработайте проигрыватель, в котором при необходимости игла сможет перескакивать через определенное число дорожек.
8. Разработайте экспериментальный прибор для измерения поверхностного натяжения.
9. Разработайте туалет, который потреблял бы меньше воды.
10. Разработайте устройство автоматического управления дождевальной установкой.
11. Разработайте устройство для изготовления и подбрасывания вверх ледяных мишеней-тарелочек, имея в виду, что поле, засоренное осколками глиняных мишеней, невозможно очистить.
12. Разработайте и постройте топливный элемент для демонстрационных целей в учебном классе.
13. Набросайте в карандаше эскиз стула своей конструкции.
14. Разработайте новую, более совершенную обучающую машину для программированного обучения.
15. Выберите особенно неблагоприятную транспортную ситуацию в вашем районе и предложите ее решение.
16. Разработайте небольшую сверхзвуковую аэродинамическую трубу для демонстрационных целей в лабораторных условиях.
17. Разработайте холодильную камеру, предназначенную для испытаний готовых изделий в заводских условиях.
18. Что можно сделать с пустыней Сахара?
19. Допустим, что жителями Земли являются собаки колли, обладающие разумом человека. Разработайте для них «автомобили» и средства общественного транспорта.
20. Разработайте устройство, способное считывать числа, напечатанные на бумаге.
21. Разработайте аппарат для посадки на Луну. Для проверки вашей идеи постройте модель и испытайте ее на приземление с нагрузкой весом 4 *кг* путем сбрасывания с высоты 3 *м* на неровную поверхность.
22. Разработайте измеритель отрицательных ускорений, испытываемых нагрузкой в задаче 21.
26. Выберите три молотка различной конструкции и оцените каждый из них.

Примечание: Вместо молотков можно взять другой инструмент, бытовые приборы (например, пылесос) или что-нибудь еще.

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Дж. Диксон

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ:
изобретательство, анализ и принятие решений

Редактор *М. Б. Великовский*
Художник *Л. Г. Ларский*
Художественный редактор *В. М. Варлашин*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*

Сдано в производство 10/IX 1968 г. Подписано к печати 5/II 1969 г.
Бумага №1 $84\times108^1/_{32}$=6,88 бум. л. Усл. 23,1 печ. л. Уч.-изд. л. 20,69
Изд. № 20/4527. Цена 1 р. 67 к. Зак. № 3173
Темплан 1968 г. Изд-ва «Мир» пор. № 203

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Ж-54, Валовая, 28